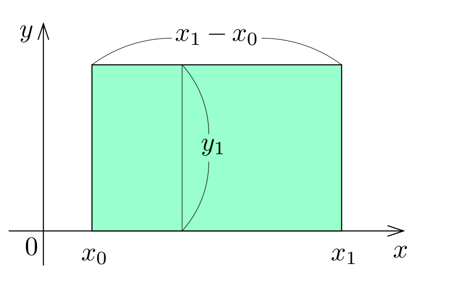
§6.0　定積分の意味

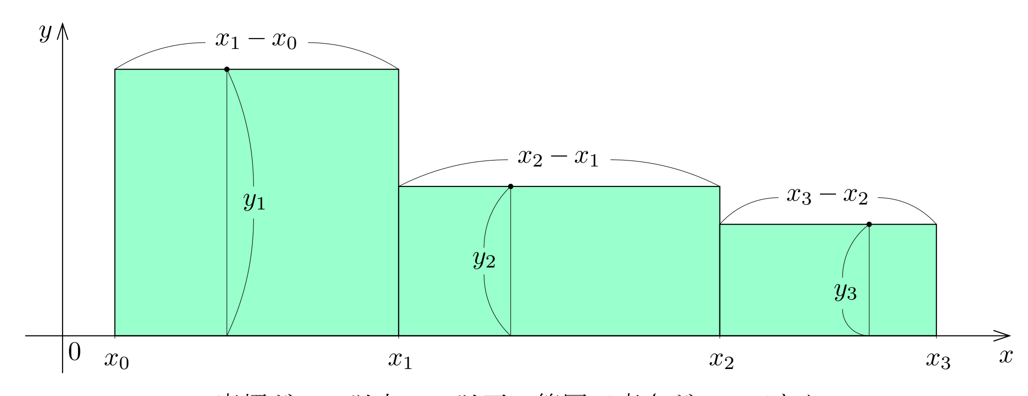
定積分は掛け算の拡張である．

xy 座標平面における領域の面積について考える．

右図のように，底辺が x 軸に含まれる長方形の点の x 座標の範囲が x_0 以上 x_1 以下であり高さが y_1 であるとする；この長方形で囲まれる領域の面積は，横幅 x_1-x_0 と高さ y_1 との積 $y_1(x_1-x_0)$ である．



1 個だけの長方形では“高さ”が一定であるが，“高さ”が途中で切り替わる図形を考える．

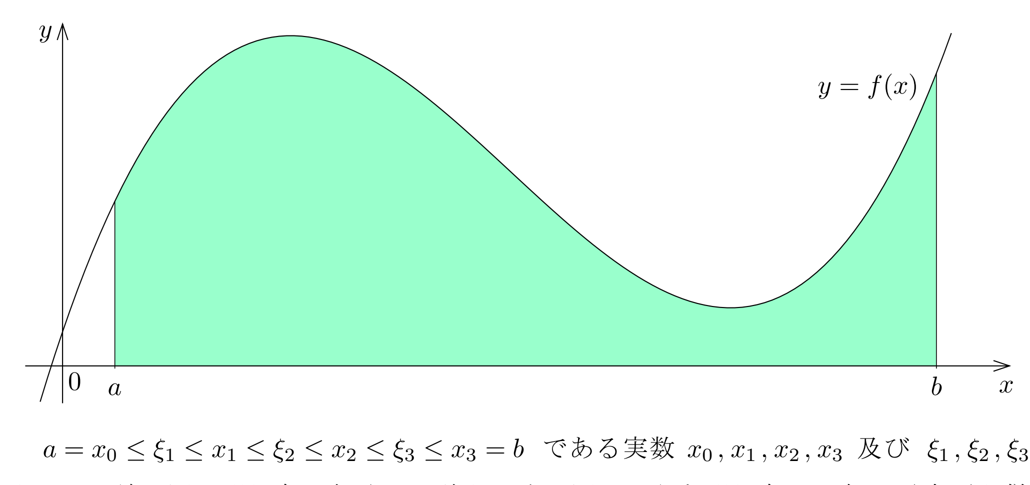


x 座標が x_0 以上 x_1 以下の範囲で高さが y_1 であり，
x 座標が x_1 以上 x_2 以下の範囲で高さが y_2 であり，
x 座標が x_2 以上 x_3 以下の範囲で高さが y_3 である

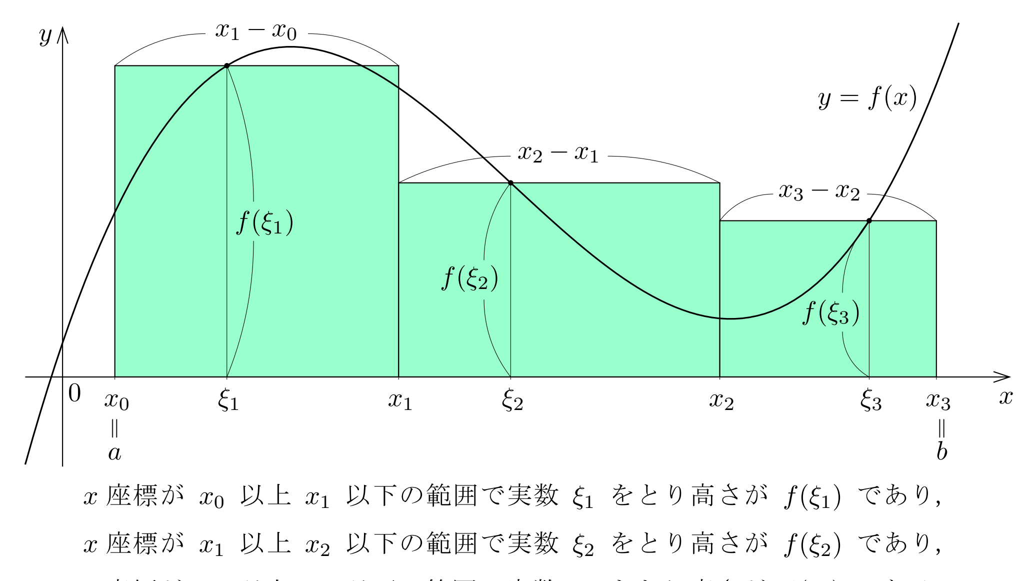
とき，上図の明緑色の 3 個の長方形を併せた図形の面積は

$$y_1(x_1-x_0)+y_2(x_2-x_1)+y_3(x_3-x_2) = \sum_{k=1}^{3}\{y_k(x_k-x_{k-1})\} .$$

x 軸からの“高さ”が x 座標の関数として変化する図形を考える． 実数 a,b について $a \le b$ で，関数 f は区間 $[a,b]$ で連続で $a \le x \le b$ である各実数 x について $f(x) \ge 0$ とする． 関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸と直線 $x=a$ と直線 $x=b$ とで囲まれる次の図の明緑色の領域の面積を考える．



$a=x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3=b$ である実数 x_0,x_1,x_2,x_3 及び ξ_1,ξ_2,ξ_3 をとり，前の図の明緑色の部分の面積を，次の図のような明緑色の 3 個の長方形を併せた図形の面積で近似する．



x 座標が x_0 以上 x_1 以下の範囲で実数 ξ_1 をとり高さが $f(\xi_1)$ であり，
x 座標が x_1 以上 x_2 以下の範囲で実数 ξ_2 をとり高さが $f(\xi_2)$ であり，
x 座標が x_2 以上 x_3 以下の範囲で実数 ξ_3 をとり高さが $f(\xi_3)$ である

とする． 上図の明緑色の 3 個の長方形を併せた図形の面積は

$$f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+f(\xi_3)(x_3-x_2) = \sum_{k=1}^{3}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} .$$

実数 a,b について $a \le b$ で，関数 f は区間 $[a,b]$ で連続で $a \le x \le b$ である各実数 x について $f(x) \ge 0$ とする． 正の各自然数 n に対して，

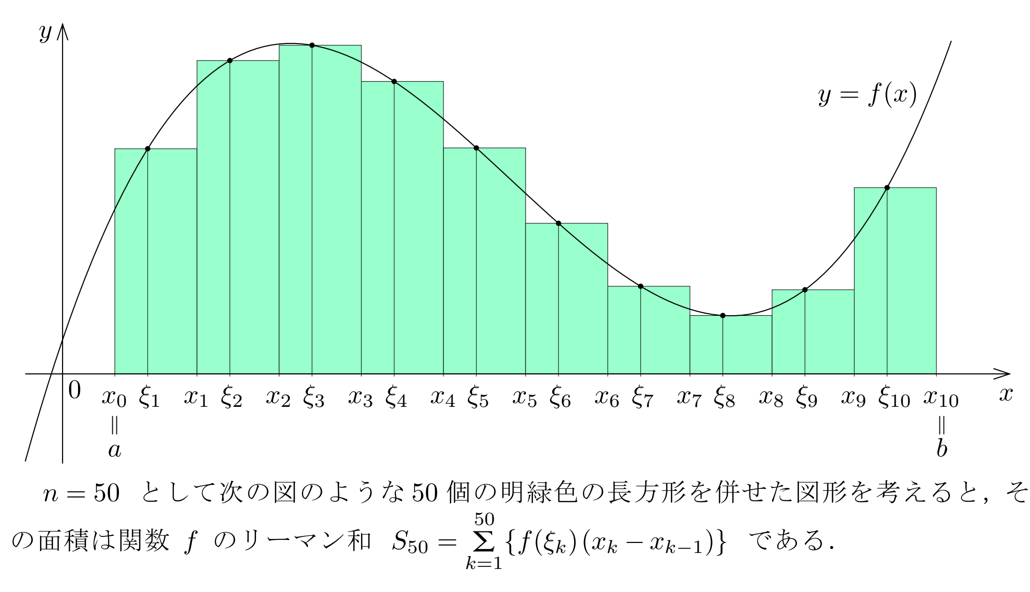
$$a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = b$$

である実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},x_n$ 及び $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_n$ をとり，n の関数 S_n を次のように定める：

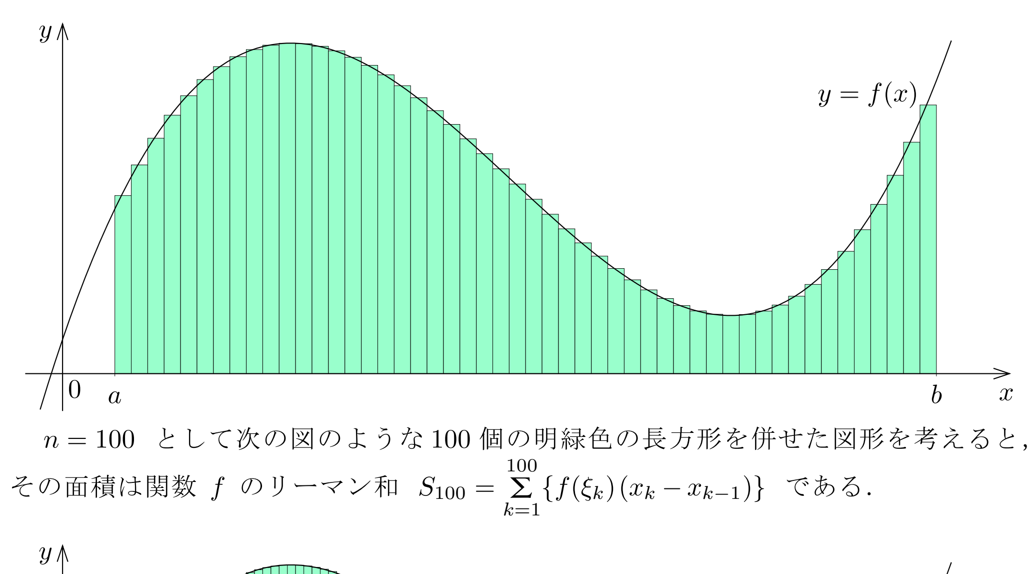
$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \\ &= f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+f(\xi_3)(x_3-x_2)+\cdots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1}) . \end{aligned}$$

この式（の値）を関数 f のリーマン和 1) という．

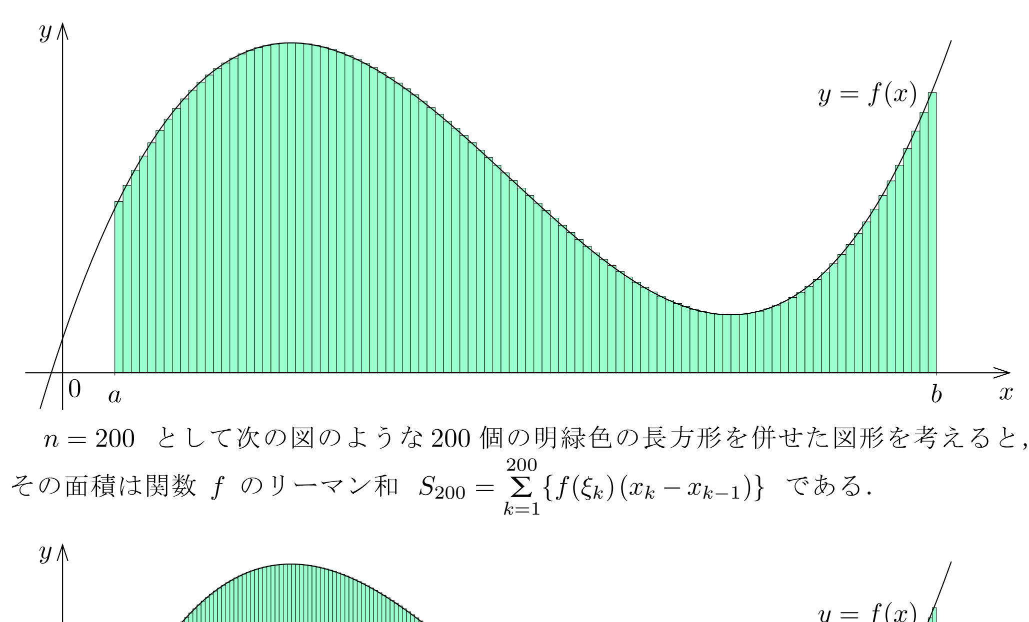
$n=10$ として次の図のような 10 個の明緑色の長方形を併せた図形を考えると，その面積は関数 f のリーマン和 $S_{10} = \sum_{k=1}^{10}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$ である．



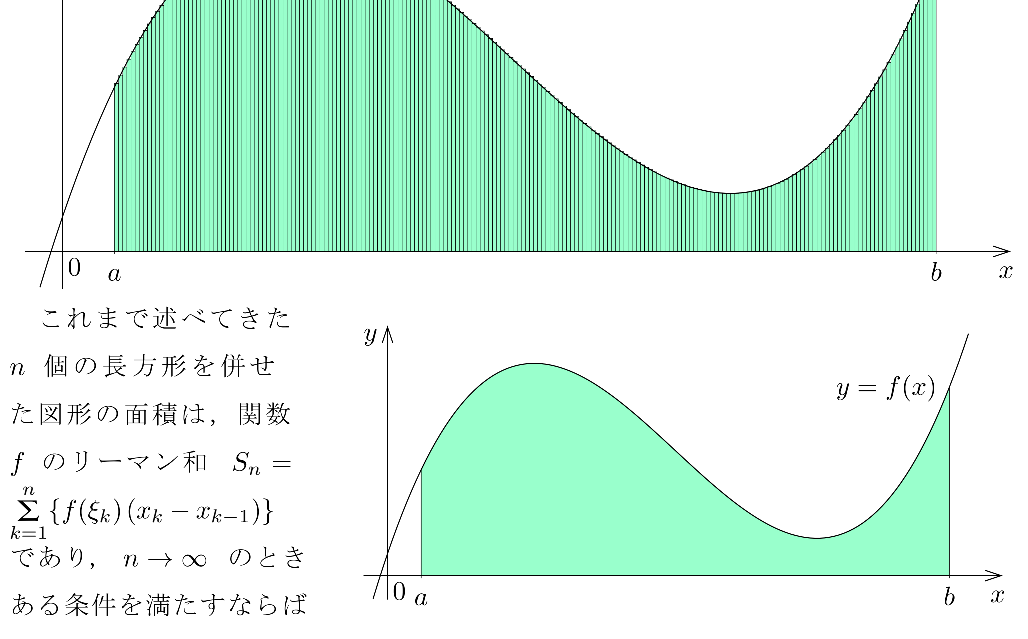
$n=50$ として次の図のような 50 個の明緑色の長方形を併せた図形を考えると，その面積は関数 f のリーマン和 $S_{50} = \sum_{k=1}^{50}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$ である．



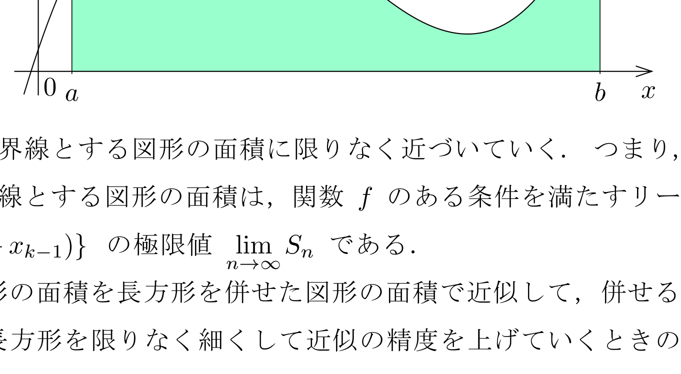
$n=100$ として次の図のような 100 個の明緑色の長方形を併せた図形を考えると，その面積は関数 f のリーマン和 $S_{100} = \sum_{k=1}^{100}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$ である．



$n=200$ として次の図のような 200 個の明緑色の長方形を併せた図形を考えると，その面積は関数 f のリーマン和 $S_{200} = \sum_{k=1}^{200}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$ である．



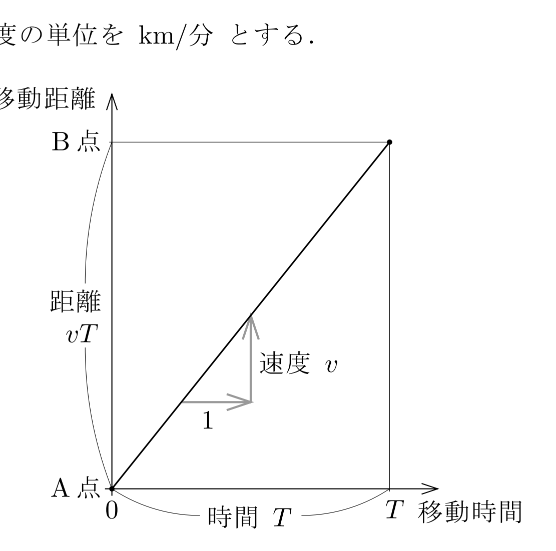
これまで述べてきた n 個の長方形を併せた図形の面積は，関数 f のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$ であり， $n \to \infty$ のときある条件を満たすならば右上の図の f のグラフを境界線とする図形の面積に限りなく近づいていく． つまり，前の図の f のグラフを境界線とする図形の面積は，関数 f のある条件を満たすリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ である．



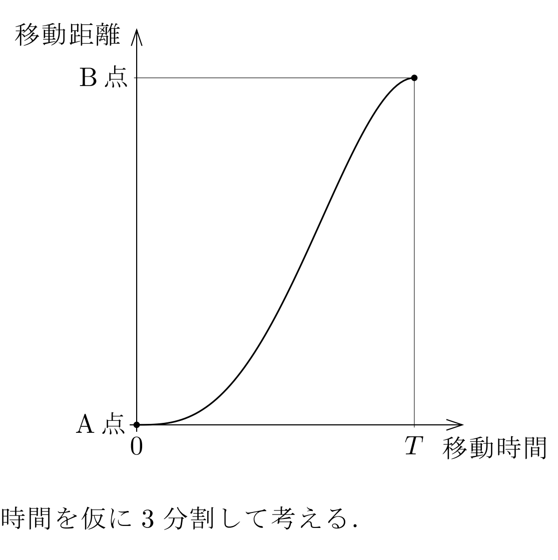
ここで述べたような，図形の面積を長方形を併せた図形の面積で近似して，併せる長方形を限りなく増やして長方形を限りなく細くして近似の精度を上げていくときの極限値として元の図形の面積を求める方法を区分求積法という．

物体が一定の向きに A 点から B 点まで移動したとする． このとき物体は直線的に移動する． 移動する時間と速度と距離とについて考える． 移動距離の単位を km とし，移動時間の単位を分とし，移動速度の単位を km/分 とする．

A 点から移動を始めてから一定時間 T の間一定速度 v で移動したとき，移動時間に対する移動距離のグラフは例えば右図のような線分であり，A 点から B 点までの移動距離は移動速度 v と移動時間 T との積 vT である．



しかし，例えば A 点に静止していた物体が B 点まで移動して静止するとき，しばしば，動き始めた後に次第に速度を上げて，止まる前に次第に速度を下げる． このように移動速度が変化すると，移動時間に対する移動距離のグラフは例えば右図のような曲線になる．$0 \le x \le T$ である各実数 x に対して，物体が A 点から移動を始めてから x 分後の移動速度を $f(x)$ とおく． このように物体の移動速度が変化するときの移動距離を近似的に求めることを考える．



A 点から B 点までの物体が移動した時間を仮に 3 分割して考える．

$$0 = x_0 \le x_1 \le x_2 \le x_3 = T$$

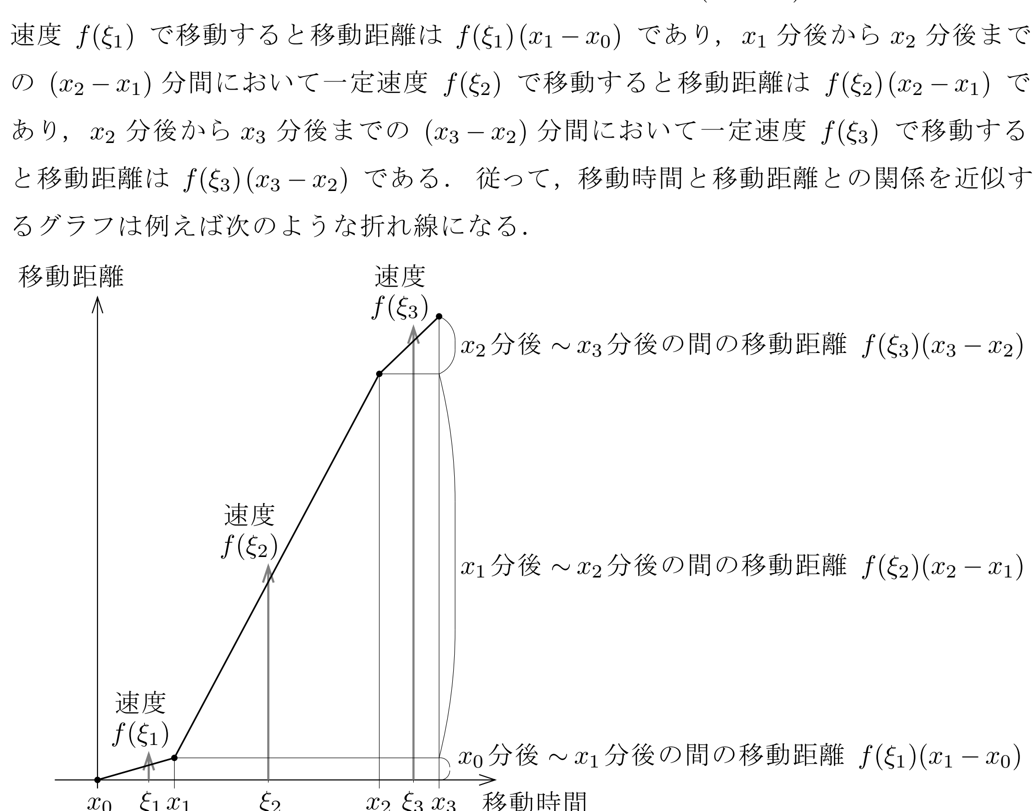
である実数 x_0,x_1,x_2,x_3 をとる；そして，A 点から B 点まで物体が移動した時間を，A 点から移動を始めてから，x_0 分後から x_1 分後までの間と，x_1 分後から x_2 分後までの間と，x_2 分後から x_3 分後までの間との 3 つの時間に分割する． そして，

$$x_0 \le \xi_1 \le x_1 , \quad x_1 \le \xi_2 \le x_2 , \quad x_2 \le \xi_3 \le x_3$$

である実数 ξ_1,ξ_3,ξ_3 をとる． A 点から移動を始めてから，

ξ_1 分後の移動速度は $f(\xi_1)$ であり，
ξ_2 分後の移動速度は $f(\xi_2)$ であり，
ξ_3 分後の移動速度は $f(\xi_3)$ である．

A 点から移動を始めてから，x_0 分後から x_1 分後までの (x_1-x_0) 分間において一定速度 $f(\xi_1)$ で移動すると移動距離は $f(\xi_1)(x_1-x_0)$ であり，x_1 分後から x_2 分後までの (x_2-x_1) 分間において一定速度 $f(\xi_2)$ で移動すると移動距離は $f(\xi_2)(x_2-x_1)$ であり，x_2 分後から x_3 分後までの (x_3-x_2) 分間において一定速度 $f(\xi_3)$ で移動すると移動距離は $f(\xi_3)(x_3-x_2)$ である． 従って，移動時間と移動距離との関係を近似するグラフは例えば次のような折れ線になる．



近似的に，A 点から移動を始めてから，

x_0 分後 $\sim x_1$ 分後の間の移動距離は $f(\xi_1)(x_1-x_0)$ であり，
x_1 分後 $\sim x_2$ 分後の間の移動距離は $f(\xi_2)(x_2-x_1)$ であり，
x_2 分後 $\sim x_3$ 分後の間の移動距離は $f(\xi_3)(x_3-x_2)$ である．

A 点から B 点まで T 分間の移動距離は近似的に次の式で表される：

$$f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+f(\xi_3)(x_3-x_2) = \sum_{k=1}^{3}\{f(\xi_k)(\xi_k-\xi_{k-1})\} .$$

正の自然数 n に対して，

$$0 = x_0 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le x_n = T$$

である実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},x_n$ をとる． A 点から B 点までの物体の移動時間 T 分間を，A 点から移動を始めてから，x_0 分後から x_1 分後までの間，x_1 分後から x_2 分後までの間，x_2 分後から x_3 分後までの間，$\cdots$，x_{n-1} 分後から x_n 分後までの間，の n 個の短い時間に分割する． 次に，

$$x_0 \le \xi_1 \le x_1 , \quad x_1 \le \xi_2 \le x_2 , \quad x_2 \le \xi_3 \le x_3 , \quad \cdots , \quad x_{n-1} \le \xi_n \le x_n$$

である実数 $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_n$ をとる． $k=1,2,3,\ldots,n$ に対して，A 点から移動を始めてから ξ_k 分後の移動速度は $f(\xi_k)$ である．

A 点から移動を始めてから x_{k-1} 分後から x_k 分後までの (x_k-x_{k-1}) 分間において一定速度 $f(\xi_k)$ で移動するとして近似すると，A 点から移動を始めてから，

x_0 分後 $\sim x_1$ 分後の間の移動距離は $f(\xi_1)(x_1-x_0)$ であり，
x_1 分後 $\sim x_2$ 分後の間の移動距離は $f(\xi_2)(x_2-x_1)$ であり，
x_2 分後 $\sim x_3$ 分後の間の移動距離は $f(\xi_3)(x_3-x_2)$ であり，
$\vdots$
x_{n-1} 分後 $\sim x_n$ 分後の間の移動距離は $f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})$ である．

これらの総和

$$\begin{aligned} &f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+f(\xi_3)(x_3-x_2)+\cdots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \end{aligned}$$

が A 点から B 点までの物体の移動距離を近似する式である．

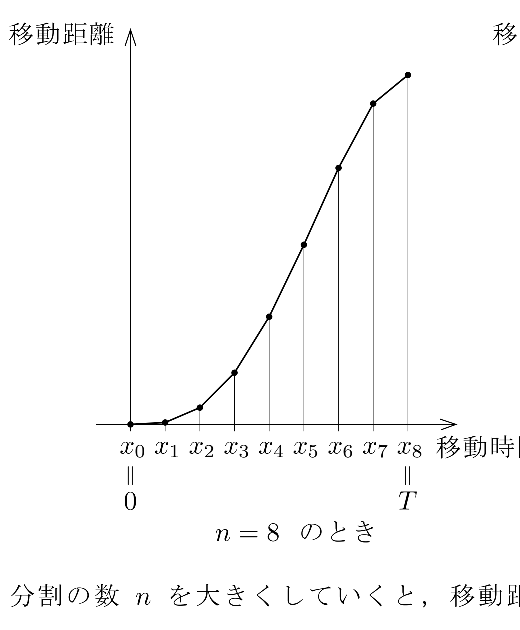
A 点から B 点までの物体の移動距離は次の式で近似される：

$$\begin{aligned} &f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+f(\xi_3)(x_3-x_2)+\cdots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} . \end{aligned}$$

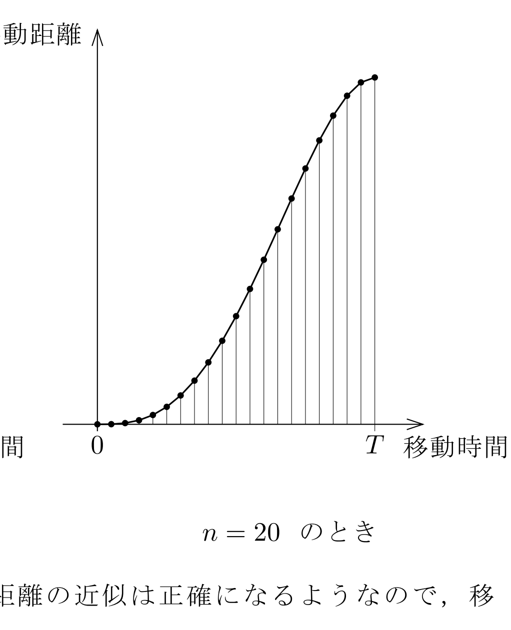
この式は関数 f のリーマン和を表す式である． これを S_n とおく：

$$\begin{aligned} S_n &= f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+f(\xi_3)(x_3-x_2)+\cdots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} . \end{aligned}$$

このように近似するときの移動時間と移動距離との関係を表すグラフは次のような折れ線になる．



$n=8$ のとき



$n=20$ のとき

分割の数 n を大きくしていくと，移動距離の近似は正確になるようなので，移動距離の近似値 S_n は実際の移動距離に近づく． 従って，移動速度のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が唯一つがあるならば，この極限値が実際の移動距離になる． このことは後の節で述べる微分積分の基本定理によって裏付けられる．

このように，一定量と一定量の掛け算で計算できる量を，量が変化するときはしばしばリーマン和の極限値と考える． リーマン和のある条件を満たす極限値が定積分である． つまり定積分はリーマン和の極限値であり，掛け算の拡張である．

1)　リーマンは，19 世紀のドイツの数学者で，初めて積分を厳密に定義した．