§6.1　定積分の定義

関数の定積分を定義する．

実数 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ の中で最も大きい実数を次のように書き表す：

$$\max\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}\ .$$

例えば次のようになる：

$$\max\{-2, 5, 3, -7\} = 5\ ,\qquad \max\left\{\frac{5}{6}, 3, \frac{9}{2}, \frac{7}{3}, 4\right\} = \frac{9}{2}\ .$$

実数 a, b について $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ をとり[2]，区間 $[a,b]$ を n 個の小区間 $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$, …, $[x_{n-1},x_n]$ に分割する．更に，

$$x_0 \leq \xi_1 \leq x_1\ ,\ x_1 \leq \xi_2 \leq x_2\ ,\ x_2 \leq \xi_3 \leq x_3\ ,\ \cdots\ ,\ x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n$$

である実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとる[3]．ξ_k ($k = 1, 2, 3, \ldots, n$) は小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ から選ばれた実数である．

区間 $[x_0,x_1]$ の幅 $x_1 - x_0$，$[x_1,x_2]$ の幅 $x_2 - x_1$，$[x_2,x_3]$ の幅 $x_3 - x_2$，…，$[x_{n-1},x_n]$ の幅 $x_n - x_{n-1}$，の中で最も大きいものを δ_n とおく：

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}\ .$$

また，各区間 $[x_{k-1},x_k]$ ($k = 1, 2, 3, \ldots, n$) の幅 $x_k - x_{k-1}$ と関数 f の値 $f(\xi_k)$ との積 $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ の総和を S_n とおく：

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} \\ &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})\ . \end{aligned}$$

この S_n （の値）を f の**リーマン和**という．リーマン和 S_n は正の自然数を表す変数 n の関数である．実数 $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をどう定めるかによって様々なリーマン和ができる．

$n \to \infty$ のとき小区間 $[x_0,x_1], [x_1,x_2], [x_2,x_3], \ldots, [x_{n-1},x_n]$ の幅は総て 0 に収束するとする；つまり $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ とする[4]．$n \to \infty$ のときどのようなリーマン和 S_n も収束して，極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるとき，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ を a から b までの f の**定積分** (definite integral) といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n\ .$$

つまり，大雑把にいうと，関数 f の定積分とは f のリーマン和の極限値である．

改めて定積分の定義を述べる．

定義　実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}\ ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

とおく．S_n を表す式を f のリーマン和という．$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して，極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，f の a から b までの定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ を次のように定義する：

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n\ .$$

関数 f が a から b まで積分可能であるとき，関数 f は b から a まで積分可能であるといい，f の b から a までの定積分 $\int_b^a f(x)\,dx$ を次のように定義する：$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ ．

実数 a と b とに対して関数 f が a から b まで積分可能であるとき，a から b までの f の定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ を求めることを f を a から b まで（定）積分するという．また，定積分を表す式 $\int_a^b f(x)\,dx$ において，a を定積分の下端といい，b を定積分の上端といい，区間 $[a,b]$ を積分区間という；更に，f を被積分関数といい，x を積分変数という．

定理　実数 a が関数 f の定義域に属すとき，

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0\ .$$

定理　実数 a と b とに対して，関数 f が a から b まで積分可能であるとき，

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx\ .$$

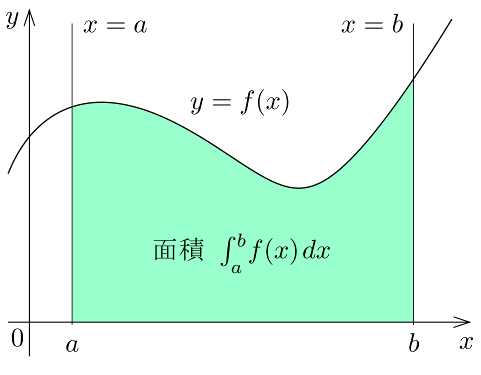
この定理は，$a \leq b$ のときは定積分の定義に含まれるが，$a > b$ のときは別途証明される．

関数は連続である範囲で積分可能である．

定理　実数 a と b とが属するある区間において関数 f が連続であるならば，f は a から b まで積分可能である．

前節で述べたように，関数のグラフを境界線とする領域の面積はリーマン和の極限値つまり定積分である．

定理　実数 a, b について $a \leq b$ とする．関数 f は区間 $[a,b]$ において連続であり，区間 $[a,b]$ において $f(x) \geq 0$ とする．xy 座標平面において，$y = f(x)$ のグラフと x 軸と直線 $x = a$ と $x = b$ とで囲まれる領域の面積は $\int_a^b f(x)\,dx$ である．



---

[2] n の値が変わると $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ の値も（大抵は）変わる．

[3] n の値が変わると $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ の値も（大抵は）変わる．

[4] $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ でないと収束しないリーマン和がいくらでもできる．