§6.2　定義に従う定積分の計算

リーマン和の極限値として定積分を計算してみる．

例　定数 c に対して定数関数 $f(x)=c$ の定積分を計算する．定数 a と b とについて $a\leq b$ とする．正の各自然数 n に対して，

$$a=x_0\leq\xi_1\leq x_1\leq\xi_2\leq x_2\leq\xi_3\leq x_3\leq\cdots\leq x_{n-1}\leq\xi_n\leq x_n=b$$

である実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},x_n$ 及び $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_n$ をとり，$f(x)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$ を考える． $f(\xi_k)=c$ なので，

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}=\sum_{k=1}^{n}\{c(x_k-x_{k-1})\}=c\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})\\&=c(x_1-x_0+x_2-x_1+x_3-x_2+x_4-x_3+\cdots+x_n-x_{n-1})=c(x_n-x_0)\\&=c(b-a)\ .\end{aligned}$$

つまり定数関数 $f(x)=c$ のリーマン和は常に $S_n=c(b-a)$ である．よって

$$\int_a^b c\,dx=\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\{c(b-a)\}=c(b-a)\ .$$

特に， $a=0$ とすると

$$\int_0^b c\,dx=bc\ .$$

終

このように掛け算は定数関数の定積分である．定数関数の定積分以外にも様々な関数の定積分があるので，定積分は掛け算の拡張である．

例題　関数 x^2 の定積分 $\int_2^5 x^2dx$ をリーマン和の極限値として計算する．

〔解説〕 正の各自然数 n に対して，

$$2=x_0\leq\xi_1\leq x_1\leq\xi_2\leq x_2\leq\xi_3\leq x_3\leq\cdots\leq x_{n-1}\leq\xi_n\leq x_n=5$$

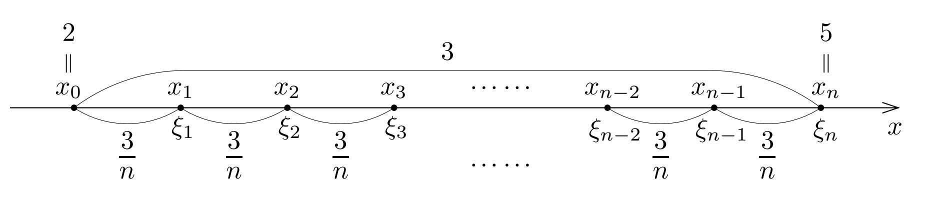
である実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},x_n$ 及び $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_n$ をとり，関数 x^2 のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{(\xi_k)^2(x_k-x_{k-1})\}$ を考える． 関数 x^2 は，実数全体で連続なので，2 から 5 まで積分可能である． 従って， $n\to\infty$ のとき $\delta_n=\max\{x_1-x_0,x_2-x_1,x_3-x_2,\ldots,x_n-x_{n-1}\}$ が 0 に収束するならば，関数 x^2 のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{(\xi_k)^2(x_k-x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ は関数 x^2 の定積分 $\int_2^5 x^2dx$ である：

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_2^5 x^2dx\ .$$

関数 x^2 のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{(\xi_k)^2(x_k-x_{k-1})\}$ の式をなるべく簡単にするために，数列 $\{x_k\}_{0\leq k\leq n}$ を等差数列にする． 公差を d とおくと， $x_n=x_0+dn$ なので $d=\dfrac{x_n-x_0}{n}=\dfrac{5-2}{n}=\dfrac{3}{n}$ ． よって，自然数 $k=0,1,2,3,\ldots,n$ について

$$x_k=x_0+dk=2+\frac{3}{n}k\ .$$

更に自然数 $k=1,2,3,\ldots,n$ について $\xi_k=x_k=2+\dfrac{3}{n}k$ と定める． 次の図のようになる．



$x_1-x_0=d=\dfrac{3}{n}$, $x_2-x_1=d=\dfrac{3}{n}$, $x_3-x_2=d=\dfrac{3}{n}$, … , $x_n-x_{n-1}=d=\dfrac{3}{n}$ なので，

$$\delta_n=\max\{x_1-x_0,x_2-x_1,x_3-x_2,\ldots,x_n-x_{n-1}\}=\frac{3}{n}\ ,$$

よって $\lim_{n\to\infty}\delta_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}=0$ ． これより，関数 x^2 のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{(\xi_k)^2(x_k-x_{k-1})\}$ は定積分 $\int_2^5 x^2dx$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_2^5 x^2dx\ .$$

自然数 $k=1,2,3,\ldots,n$ に対して， $\xi_k=x_k=x_0+dk=2+\dfrac{3}{n}k$ ， $x_k-x_{k-1}=d=\dfrac{3}{n}$ なので，

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\{(\xi_k)^2(x_k-x_{k-1})\}=\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(2+\frac{3}{n}k\right)^2\frac{3}{n}\right\}\\&=\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{3}{n}k\right)^2=\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(4+\frac{12}{n}k+\frac{9}{n^2}k^2\right)\\&=\frac{3}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}4+\frac{12}{n}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2\right)\ ;\end{aligned}$$

定数 c 及び正の自然数 n について，

$$\sum_{k=1}^{n}c=nc\ ,\qquad\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n}{2}(n+1)\ ,\qquad\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)\ ;$$

これらの公式を用いると

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{3}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}4+\frac{12}{n}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2\right)\\&=\frac{3}{n}\left\{4n+\frac{12}{n}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{9}{n^2}\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)\right\}\\&=\frac{3}{n}\left\{4n+6(n+1)+\frac{3}{2}\frac{(n+1)(2n+1)}{n}\right\}\\&=12+18\frac{n+1}{n}+\frac{9}{2}\frac{2n^2+3n+1}{n^2}\\&=12+18\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{9}{2}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_2^5 x^2dx&=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{12+18\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{9}{2}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right\}\\&=12+18(1+0)+\frac{9}{2}(2+0+0)=12+18+9\\&=39\ .\end{aligned}$$

故に $\int_2^5 x^2dx=39$ ．

終

問題 6.2.1　関数 x^2 は 1 から 4 まで積分可能である．正の各自然数 n に対して，

$$1=x_0\leq\xi_1\leq x_1\leq\xi_2\leq x_2\leq\xi_3\leq x_3\leq\cdots\leq x_{n-1}\leq\xi_n\leq x_n=4$$

である実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},x_n$ 及び実数 $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_n$ を次のように定める： $x_0=1$ ，自然数 $k=1,2,3,\ldots,n$ に対して $x_k=\xi_k=1+\dfrac{3}{n}k$ ． 自然数 $k=1,2,3,\ldots,n$ に対して $x_k-x_{k-1}=\dfrac{3}{n}$ なので，

$$\max\{x_1-x_0,x_2-x_1,x_3-x_2,\ldots,x_n-x_{n-1}\}=\frac{3}{n}\ ;$$

これは $n\to\infty$ のとき 0 に収束する． よって関数 x^2 のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{(\xi_k)^2(x_k-x_{k-1})\}$ は $n\to\infty$ のとき定積分 $\int_1^4 x^2dx$ に収束する： $\lim_{n\to\infty}S_n=\int_1^4 x^2dx$ ． 定積分 $\int_1^4 x^2dx$ を関数 x^2 のリーマン和 S_n の極限値として計算せよ．

例題　指数関数 2^x の 3 から 8 までの定積分 $\int_3^8 2^xdx$ を計算する．

〔解説〕 正の各自然数 n に対して，

$$3=x_0\leq\xi_1\leq x_1\leq\xi_2\leq x_2\leq\xi_3\leq x_3\leq\cdots\leq x_{n-1}\leq\xi_n\leq x_n=8$$

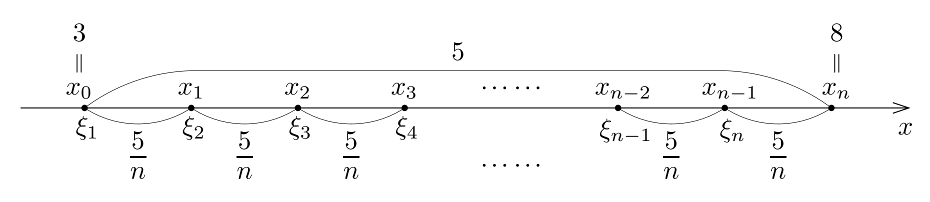
である実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},x_n$ 及び実数 $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_n$ をとり，指数関数 2^x のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{2^{\xi_k}(x_k-x_{k-1})\}$ を考える． 指数関数 2^x は，実数全体で連続なので，3 から 8 まで積分可能である． 従って， $n\to\infty$ のとき $\delta_n=\max\{x_1-x_0,x_2-x_1,x_3-x_2,\ldots,x_n-x_{n-1}\}$ が 0 に収束するならば， $n\to\infty$ のとき指数関数 2^x のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{2^{\xi_k}(x_k-x_{k-1})\}$ は定積分 $\int_3^8 2^xdx$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_3^8 2^xdx\ .$$

関数 x^2 のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{2^{\xi_k}(x_k-x_{k-1})\}$ の式をなるべく簡単にするために，数列 $\{x_k\}_{0\leq k\leq n}$ を等差数列にする． 公差を d とおくと， $x_n=x_0+dn$ なので $d=\dfrac{x_n-x_0}{n}=\dfrac{8-3}{n}=\dfrac{5}{n}$ ． よって，自然数 $k=0,1,2,3,\ldots,n$ について

$$x_k=x_0+dk=3+\frac{5}{n}k\ .$$

更に自然数 $k=1,2,3,\ldots,n$ について $\xi_k=x_{k-1}=3+\dfrac{5}{n}(k-1)$ と定める． 次の図のようになる．



自然数 $k=1,2,3,\ldots,n$ について $x_k-x_{k-1}=d=\dfrac{5}{n}$ なので，

$$\delta_n=\max\{x_1-x_0,x_2-x_1,x_3-x_2,\ldots,x_n-x_{n-1}\}=d=\frac{5}{n}\ ;$$

よって $\lim_{n\to\infty}\delta_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{5}{n}=0$ ． これより，指数関数 2^x のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{2^{\xi_k}(x_k-x_{k-1})\}$ は定積分 $\int_3^8 2^xdx$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_3^8 2^xdx\ .$$

自然数 $k=0,1,2,3,\ldots,n$ について， $\xi_k=x_{k-1}=3+\dfrac{5}{n}(k-1)$ ， $x_k-x_{k-1}=\dfrac{5}{n}$ なので，

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\{2^{\xi_k}(x_k-x_{k-1})\}=\sum_{k=1}^{n}\left\{2^{3+\frac{5}{n}(k-1)}\frac{5}{n}\right\}\\&=\frac{5}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{2^32^{\frac{5}{n}(k-1)}\right\}=\frac{5\cdot2^3}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{5}{n}(k-1)}\\&=\frac{40}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1}\ .\end{aligned}$$

正の自然数 n 及び実数 a,r に対して， $r\neq1$ のとき $\sum_{k=1}^{n}(ar^{k-1})=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ ．

$$S_n=\frac{40}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1}=\frac{40}{n}\frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^n-1}{2^{\frac{5}{n}}-1}=\frac{40}{n}\frac{2^5-1}{2^{\frac{5}{n}}-1}=\frac{40}{n}\frac{31}{2^{\frac{5}{n}}-1}\ .$$

変数 t を $t=2^{\frac{5}{n}}-1$ とおく． $2^{\frac{5}{n}}=1+t$ ，両辺の自然対数を考えて $\ln2^{\frac{5}{n}}=\ln(1+t)$ ， $\dfrac{5}{n}\ln2=\ln(1+t)$ ， $\dfrac{1}{n}=\dfrac{\ln(1+t)}{5\ln2}$ なので，

$$S_n=\frac{40}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1}=\frac{40}{n}\frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^n-1}{2^{\frac{5}{n}}-1}=\frac{40}{n}\frac{2^5-1}{2^{\frac{5}{n}}-1}=\frac{40}{n}\frac{31}{2^{\frac{5}{n}}-1}\ .$$

変数 t を $t=2^{\frac{5}{n}}-1$ とおく． $2^{\frac{5}{n}}=1+t$ ，両辺の自然対数を考えて $\ln2^{\frac{5}{n}}=\ln(1+t)$ ， $\dfrac{5}{n}\ln2=\ln(1+t)$ ， $\dfrac{1}{n}=\dfrac{\ln(1+t)}{5\ln2}$ なので，

$$S_n=\frac{40}{n}\frac{31}{2^{\frac{5}{n}}-1}=\frac{40\ln(1+t)}{5\ln2}\cdot\frac{31}{t}=\frac{248}{\ln2}\frac{\ln(1+t)}{t}\ .$$

$n\to\infty$ のとき $t=2^{\frac{5}{n}}-1\to2^0-1=0$ ． 対数関数 $\ln x$ は連続なので，

$$\begin{aligned}\int_3^8 2^xdx&=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{t\to0}\left\{\frac{248}{\ln2}\frac{\ln(1+t)}{t}\right\}=\lim_{t\to0}\left\{\frac{248}{\ln2}\frac{1}{t}\ln(1+t)\right\}\\&=\lim_{t\to0}\left\{\frac{248}{\ln2}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}=\frac{248}{\ln2}\ln\left\{\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}=\frac{248}{\ln2}\ln e\\&=\frac{248}{\ln2}\ .\end{aligned}$$

故に $\int_3^8 2^xdx=\dfrac{248}{\ln2}$ ．

終

問題 6.2.2　指数関数 3^x は 2 から 4 まで積分可能である．正の各自然数 n に対して，

$$2=x_0\leq\xi_1\leq x_1\leq\xi_2\leq x_2\leq\xi_3\leq x_3\leq\cdots\leq x_{n-1}\leq\xi_n\leq x_n=4$$

である実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},x_n$ 及び実数 $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_n$ を次のように定める： $x_0=2$ ，自然数 $k=1,2,3,\ldots,n$ に対して， $x_k=2+\dfrac{2}{n}k$ ， $\xi_k=x_{k-1}=2+\dfrac{2}{n}(k-1)$ ． $k=1,2,3,\ldots,n$ に対して $x_k-x_{k-1}=\dfrac{2}{n}$ なので，

$$\max\{x_1-x_0,x_2-x_1,x_3-x_2,\ldots,x_n-x_{n-1}\}=\frac{2}{n}\ ;$$

これは $n\to\infty$ のとき 0 に収束する． よって関数 3^x のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{3^{\xi_k}(x_k-x_{k-1})\}$ は $n\to\infty$ のとき定積分 $\int_2^4 3^xdx$ に収束する： $\lim_{n\to\infty}S_n=\int_2^4 3^xdx$ ． 定積分 $\int_2^4 3^xdx$ を関数 3^x のリーマン和 S_n の極限値として計算せよ．

例題　関数 $\sqrt{x}$ の 5 から 7 までの定積分 $\int_5^7\sqrt{x}\,dx$ を計算する．

〔解説〕 正の各自然数 n に対して，

$$5=x_0\leq\xi_1\leq x_1\leq\xi_2\leq x_2\leq\xi_3\leq x_3\leq\cdots\leq x_{n-1}\leq\xi_n\leq x_n=7$$

である実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},x_n$ 及び実数 $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_n$ をとり，関数 $\sqrt{x}$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{\sqrt{\xi_k}(x_k-x_{k-1})\}$ を考える． 関数 $\sqrt{x}$ は，0 以上の実数全体で連続なので，5 から 7 まで積分可能である． 従って， $n\to\infty$ のとき $\delta_n=\max\{x_1-x_0,x_2-x_1,x_3-x_2,\ldots,x_n-x_{n-1}\}$ が 0 に収束するならば， $n\to\infty$ のとき関数 $\sqrt{x}$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{\sqrt{\xi_k}(x_k-x_{k-1})\}$ は定積分 $\int_5^7\sqrt{x}\,dx$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_5^7\sqrt{x}\,dx\ .$$

関数 $\sqrt{x}$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{\sqrt{\xi_k}(x_k-x_{k-1})\}$ の式を計算するために，数列 $\{x_k\}_{0\leq k\leq n}$ を等比数列にする． 公比を r とおく． $x_n=x_0r^n$ ， $r^n=\dfrac{x_n}{x_0}=\dfrac{7}{5}$ ， $r=\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}$ ． よって，自然数 $k=0,1,2,3,\ldots,n$ について

$$x_k=x_0r^k=5\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}^k=5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k}{n}}\ .$$

自然数 $k=1,2,3,\ldots,n$ に対して，

$$\begin{aligned}x_k-x_{k-1}&=5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k}{n}}-5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}}=5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}+\frac{1}{n}}-5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}}\\&=5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right\}\ .\end{aligned}$$

指数関数 $\left(\dfrac{7}{5}\right)^x$ は単調増加なので， $k\leq n$ より $\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}}\leq\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}}$ ，よって

$$\delta_n=\max\{x_1-x_0,x_2-x_1,x_3-x_2,\ldots,x_n-x_{n-1}\}=5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right\}\ .$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{7}{5}\right)^{1-\frac{1}{n}}=\left(\dfrac{7}{5}\right)^1=\dfrac{7}{5}$ ， $\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right\}=\left(\dfrac{7}{5}\right)^0-1=0$ ，よって $\lim_{n\to\infty}\delta_n=\lim_{n\to\infty}\left[5\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}}\left\{\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right\}\right]=0$ ． これより， $n\to\infty$ のとき関数 $\sqrt{x}$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{\sqrt{\xi_k}(x_k-x_{k-1})\}$ は定積分 $\int_5^7\sqrt{x}\,dx$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_5^7\sqrt{x}\,dx\ .$$

自然数 $k=1,2,3,\ldots,n$ について $x_k-x_{k-1}=5\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}}\left\{\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right\}$ ． $k=1,2,3,\ldots,n$ に対して $\xi_k=x_{k-1}=5\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}}$ と定める．

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\{\sqrt{\xi_k}(x_k-x_{k-1})\}=\sum_{k=1}^{n}\left[\left\{5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}}\right\}^{\frac{1}{2}}5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right\}\right]\\&=5^{\frac{1}{2}}5\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right\}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}}\right\}^{k-1}\ ,\end{aligned}$$

正の自然数 n 及び実数 a,r に対して， $r\neq1$ のとき $\sum_{k=1}^{n}(ar^{k-1})=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ ．

$$\begin{aligned}S_n&=5^{\frac{1}{2}}5\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right\}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}}\right\}^{k-1}=5\sqrt{5}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right\}\frac{\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}}\right\}^n-1}{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}}-1}\\&=5\sqrt{5}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right\}\frac{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2}}-1}{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}}-1}=5\sqrt{5}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right\}\frac{\frac{7\sqrt{7}}{5\sqrt{5}}-1}{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}}-1}\\&=\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right\}\frac{7\sqrt{7}-5\sqrt{5}}{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}}-1}=(7\sqrt{7}-5\sqrt{5})\frac{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}}-1}\ .\end{aligned}$$

$n\to\infty$ のときの $\dfrac{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}}-1}$ の極限値を考える． $t=\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2n}}$ とおく．

$\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}}=\left\{\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2n}}\right\}^3=t^3$ ， $\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}=\left\{\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2n}}\right\}^2=t^2$ なので，

$$\frac{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}}-1}=\frac{t^2-1}{t^3-1}=\frac{(t+1)(t-1)}{(t-1)(t^2+t+1)}=\frac{t+1}{t^2+t+1}\ .$$

$n\to\infty$ のとき $t=\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2n}}\to\left(\dfrac{7}{5}\right)^0=1$ なので，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}}-1}=\lim_{t\to1}\frac{t+1}{t^2+t+1}=\frac{2}{3}\ .$$

よって

$$\begin{aligned}\int_5^7\sqrt{x}\,dx&=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{(7\sqrt{7}-5\sqrt{5})\frac{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}}-1}\right\}=(7\sqrt{7}-5\sqrt{5})\cdot\frac{2}{3}\\&=\frac{14\sqrt{7}-10\sqrt{5}}{3}\ .\end{aligned}$$

故に $\int_5^7\sqrt{x}\,dx=\dfrac{14\sqrt{7}-10\sqrt{5}}{3}$ ．

終

問題 6.2.3　関数 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ は 3 から 5 まで積分可能である． 正の各自然数 n に対して， $3=x_0\leq\xi_1\leq x_1\leq\xi_2\leq x_2\leq\xi_3\leq x_3\leq\cdots\leq x_{n-1}\leq\xi_n\leq x_n=5$ である実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},x_n,\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_n$ を次のように定める： $x_0=3$ ，自然数 $k=1,2,3,\ldots,n$ に対して， $x_k=3\left(\dfrac{5}{3}\right)^{\frac{k}{n}}$ ， $\xi_k=x_{k-1}=3\left(\dfrac{5}{3}\right)^{\frac{k-1}{n}}$ ． $x_k-x_{k-1}=3\left(\dfrac{5}{3}\right)^{\frac{k}{n}}-3\left(\dfrac{5}{3}\right)^{\frac{k-1}{n}}=3\left(\dfrac{5}{3}\right)^{\frac{k-1}{n}}\left\{\left(\dfrac{5}{3}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right\}$ なので，

$$\max\{x_1-x_0,x_2-x_1,x_3-x_2,\ldots,x_n-x_{n-1}\}=3\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{n-1}{n}}\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right\}\ ;$$

これは $n\to\infty$ のとき 0 に収束する． よって関数 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{\xi_k}}(x_k-x_{k-1})\right\}$ は $n\to\infty$ のとき定積分 $\displaystyle\int_3^5\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ に収束する： $\lim_{n\to\infty}S_n=\displaystyle\int_3^5\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ ． 定積分 $\displaystyle\int_3^5\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ を関数 $\sqrt{x}$ のリーマン和 S_n の極限値として計算せよ．