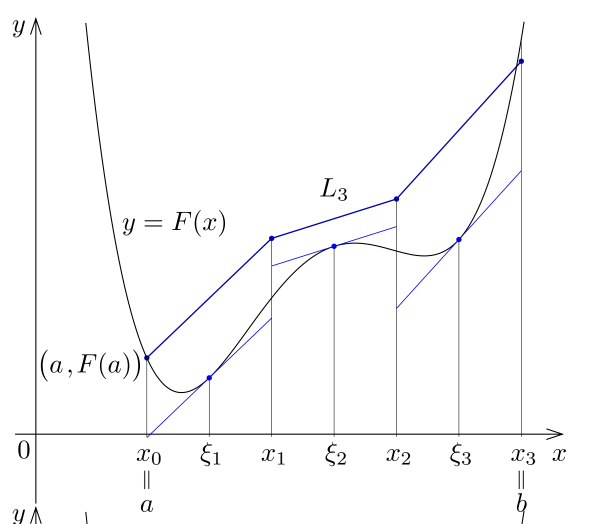
§6.3 微分積分の基本定理

実数 a,b について $a \le b$ とする． 関数 F は区間 $[a,b]$ において微分可能であり， F の導関数 F' は a から b まで定積分可能であるとする． xy 座標平面において関数 $y=F(x)$ のグラフを考える． 正の自然数 n に対して

$$a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = b$$

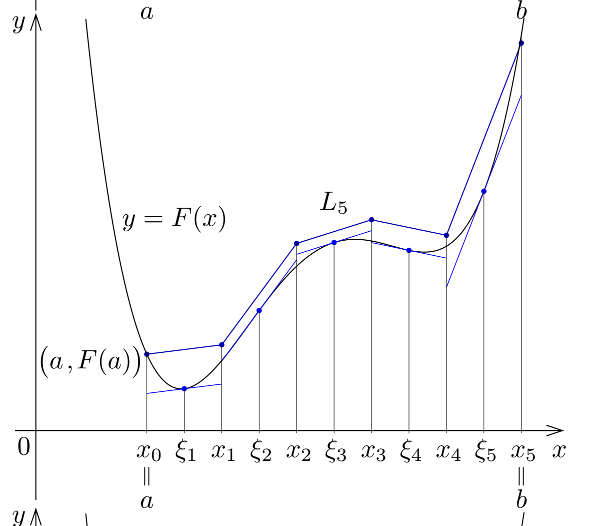
である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとる． $n \to \infty$ のとき $\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$ は 0 に収束するとする．

例として $n=3$ とする． $y=F(x)$ のグラフにおいて，点 $(\xi_1, F(\xi_1))$ における接線の点の x 座標の範囲を区間 $[x_0, x_1]$ に制限した線分と，点 $(\xi_2, F(\xi_2))$ における接線の点の x 座標の範囲を区間 $[x_1, x_2]$ に制限した線分と，点 $(\xi_3, F(\xi_3))$ における接線の点の x 座標の範囲を区間 $[x_2, x_3]$ に制限した線分とを考える． 更にこれらの線分を上下に平行移動させて，一つに繋げた折れ線 L_3 を考える． L_3 の左端の点は $(a, F(a))$ にする．

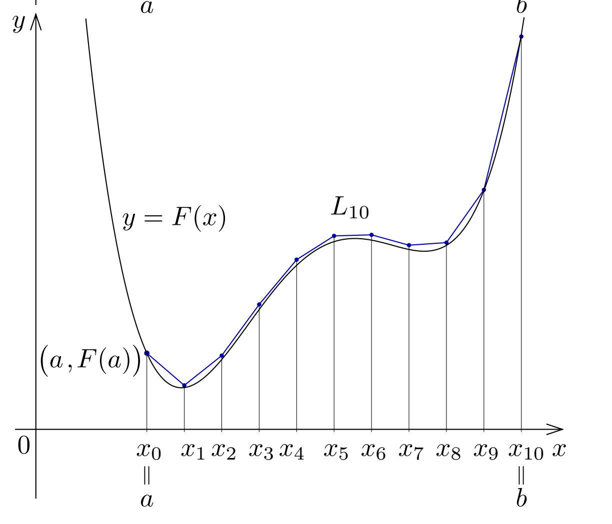


このような接線に平行な線分を一つに繋げた折れ線で $y=F(x)$ のグラフを近似する．

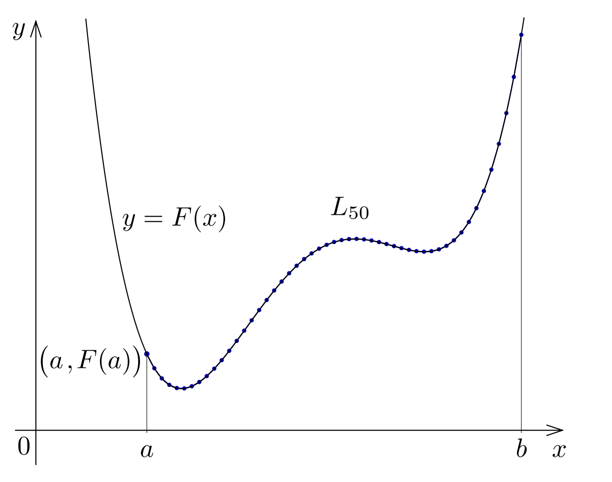
自然数 $k=1,2,3,\ldots,n$ に対して， $y=F(x)$ のグラフの点 $(\xi_k, F(\xi_k))$ における接線において要素の点の x 座標の範囲を区間 $[x_{k-1}, x_k]$ に制限した線分を考える；更にこれらの線分を上下に平行移動させて，一つに繋げた折れ線 L_n を作る． L_n の左端の点は $(a, F(a))$ にする．



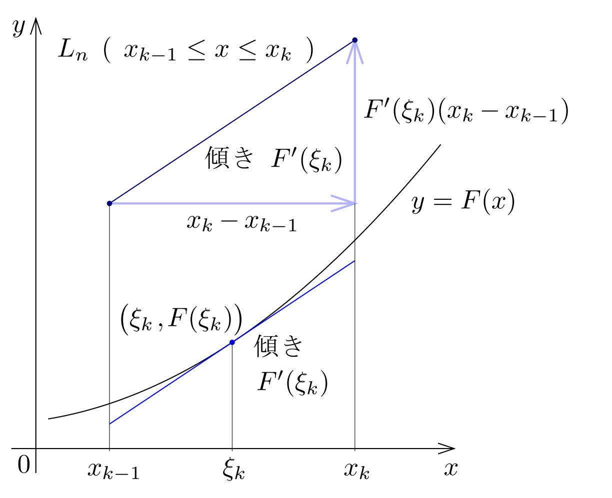
$n=5$ のときの折れ線 L_5 は例えば右上の図のようになる． $n=10$ のときの折れ線 L_{10} は例えば右の図のようになる． 更に $n=50$ のときの折れ線 L_{50} は例えば右図のようになる．



このように，自然数を表す変数 n の値を限りなく大きくしていくと折れ線 L_n は $y=F(x)$ のグラフに限りなく近づく．



$y=F(x)$ のグラフの点 $(\xi_k, F(\xi_k))$ における接線の傾きは $F'(\xi_k)$ である． 折れ線 L_n を構成する線分のうち点の x 座標の範囲が区間 $[x_{k-1}, x_k]$ である線分は，この接線と平行なので，傾きが $F'(\xi_k)$ である． L_n の点について， x 座標が x_{k-1} から x_k に増加するとき， x 座標の増分は $x_k - x_{k-1}$ なので， y 座標の増分は $F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ であり， y 座標は $F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ 増加する．



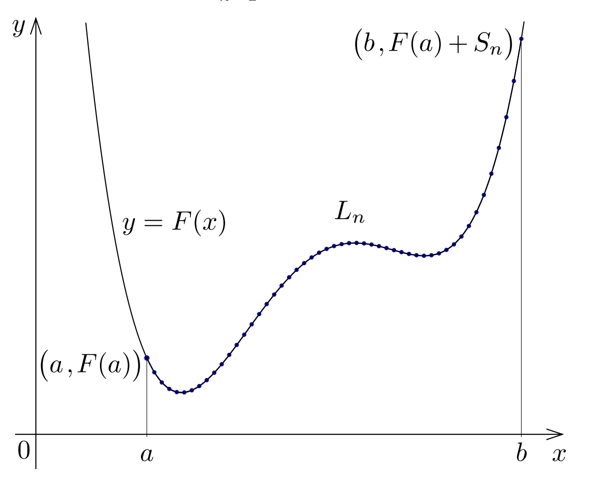
x 座標が x_0 から x_1 に増加すると y 座標は $F'(\xi_1)(x_1 - x_0)$ 増加し，
x 座標が x_1 から x_2 に増加すると y 座標は $F'(\xi_2)(x_2 - x_1)$ 増加し，
x 座標が x_2 から x_3 に増加すると y 座標は $F'(\xi_3)(x_3 - x_2)$ 増加し，
⋮
x 座標が x_{n-1} から x_n に増加すると y 座標は $F'(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$ 増加する．

これらを合計する． 折れ線 L_n の点について， x 座標が $x_0 = a$ から $x_n = b$ に増加すると， y 座標は

$$F'(\xi_1)(x_1 - x_0) + F'(\xi_2)(x_2 - x_1) + F'(\xi_3)(x_3 - x_2) + \cdots + F'(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \{F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

増加する． この y 座標の増加量を S_n とおく： $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ ．

折れ線 L_n に属す点の x 座標が a から b に増加すると， y 座標は S_n だけ増加する． 折れ線 L_n の左端の点が $(a, F(a))$ なので， L_n の右端の点は $(b, F(a)+S_n)$ である． $n \to \infty$ のとき，折れ線 L_n は $y=F(x)$ のグラフに限りなく近づくので， L_n の右端の点 $(b, F(a)+S_n)$ は $y=F(x)$ のグラフの点 $(b, F(b))$ に限りなく近づく． よって



$$\lim_{n\to\infty} \{F(a) + S_n\} = F(b) .$$

$F(a)$ は定数なので $\lim_{n\to\infty} \{F(a) + S_n\} = F(a) + \lim_{n\to\infty} S_n$ ， よって $F(a) + \lim_{n\to\infty} S_n = F(b)$ なので

$$\lim_{n\to\infty} S_n = F(b) - F(a) .$$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は F の導関数 F' のリーマン和であり， $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ なので， $\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b F'(x)\,dx$ ． 故に

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a) .$$

このように考えると，次の微分積分の基本定理[6]が導かれる． 微分積分の基本定理は，その名前のとおり，微分積分の最も基本となる定理である． その証明は後にする．

定理（微分積分の基本定理）　関数 f は実数 a から実数 b まで積分可能であるとする． a,b が属するある区間において，関数 F が微分可能で $F'(x) = f(x)$ ならば，

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) .$$

定積分はリーマン和の極限値であるが，リーマン和の極限値を計算するのは困難な事が多い． しかし，微分積分の基本定理を用いるとしばしば定積分を比較的簡単に計算できる．

例　関数 F を $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ とおくと，

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3\right) = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 = x^2 ;$$

微分積分の基本定理より，

$$\int_2^5 x^2\,dx = F(5) - F(2) = \frac{1}{3}5^3 - \frac{1}{3}2^3 = \frac{125-8}{3} = \frac{117}{3} = 39 .$$ 終

例　1 でない正の実数 a を底とする指数関数 a^x の微分公式は

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a .$$

関数 F を $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$ とおくと，

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\frac{2^x}{\ln 2} = \frac{2^x \ln 2}{\ln 2} = 2^x ;$$

微分積分の基本定理より，

$$\int_3^8 2^x\,dx = F(8) - F(3) = \frac{2^8}{\ln 2} - \frac{2^3}{\ln 2} = \frac{256-8}{\ln 2} = \frac{248}{\ln 2} .$$ 終

例題　微分公式 $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ を用いて，定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$ を計算する．

余弦関数 $\cos x$ は，区間 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ において連続なので， 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで積分可能である． $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ なので，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1 .$$ 終

問題 6.3.1　$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$ であることを用いて，定積分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx$ を計算せよ．

例題　微分公式 $\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ （ $-1 < x < 1$ ） を用いて，定積分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ を計算する．

関数 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ は，区間 $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ において連続なので， $\frac{1}{2}$ から $\frac{\sqrt{3}}{2}$ まで積分可能である． $\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ （ $-1 < x < 1$ ）なので，

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} .$$ 終

問題 6.3.2　微分公式 $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$ （ $x \ne 0$ ） を用いて，定積分 $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$ を計算せよ．

問題 6.3.3　微分公式 $\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$ を用いて，定積分 $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ を計算せよ．

関数 F は実数 a が属す区間 I において微分可能とする． 更に， I の各実数 x に対して， F の導関数 F' は a から x まで積分可能であるとする． 微分積分の基本定理より $\int_a^x F'(t)\,dt = F(x) - F(a)$ なので，

$$F(x) = \int_a^x F'(t)\,dt + F(a) .$$

つまり，関数 F の導関数 F' を定積分すると，元の関数 F の値を求めることができる． この意味で，積分は微分の逆の操作である．

微分積分の基本定理の主要部を証明する． 5.2 節で述べた平均値の定理を用いる． 実数 p と q とについて $p < q$ で，関数 F が区間 $[p,q]$ において微分可能であるならば，次のような実数 r がある：

$$F(q) - F(p) = F'(r)(q-p) \quad かつ \quad p < r < q .$$

実数 a と b とについて $a < b$ のときを考える． 関数 f が実数 a から実数 b まで定積分可能であるとする． 更に，区間 $[a,b]$ において関数 F は微分可能で $F'(x) = f(x)$ と仮定する． 等式 $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ を導く．

正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ をとり， δ_n を次のように定める：

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} .$$

$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ とする． 自然数 $k=1,2,3,\ldots,n$ に対して， $x_{k-1} < x_k$ で， f は区間 $[x_{k-1}, x_k]$ で微分可能なので，平均値の定理より次のような実数 ξ_k がある：

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad かつ \quad x_{k-1} < \xi_k < x_k .$$

実数 ξ_k は区間 $[a,b]$ に属すので，仮定より $F'(\xi_k) = f(\xi_k)$ ， よって

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) .$$

これより

$$\sum_{k=1}^{n} \{F(x_k) - F(x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} .$$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ とおく． これは関数 f のリーマン和である．

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n} \{F(x_k) - F(x_{k-1})\} \\
&= F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + F(x_3) - F(x_2) + F(x_4) - F(x_3) + \cdots \\
&\qquad + F(x_{n-2}) - F(x_{n-3}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + F(x_n) - F(x_{n-1}) \\
&= -F(x_0) + F(x_n) = -F(a) + F(b) \\
&= F(b) - F(a) .
\end{aligned}$$

関数 f は a から b まで定積分可能であり， $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ なので， f のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は $n \to \infty$ のとき f の定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ に収束する： $\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx$ ． 故に，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \{F(b) - F(a)\} = F(b) - F(a) .$$

こうして微分積分の基本定理の主要部が証明された．

---

[6] ニュートン・ライプニッツの定理ともいわる． ニュートンは17世紀のイギリスの物理学者・数学者である． ライプニッツは17世紀ドイツの哲学者・数学者である．