## §6.5　不定積分の公式

積分の公式を導くには定理6.4.4を用いる：関数 $F$ が微分可能である区間において

$$\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

余弦関数 $\cos x$ の不定積分 $\int\cos x\,dx$ を求める．余弦関数 $\cos x$ の原始関数，つまり $\frac{d}{dx}F(x) = \cos x$ である関数 $F(x)$ が分かれば，

$$\int\cos x\,dx = \int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ なので，

$$\int\cos x\,dx = \int\left(\frac{d}{dx}\sin x\right)dx = \sin x+C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

正弦関数 $\sin x$ の不定積分 $\int\sin x\,dx$ を求める．正弦関数 $\sin x$ の原始関数，つまり $\frac{d}{dx}F(x) = \sin x$ である関数 $F(x)$ が分かれば，

$$\int\sin x\,dx = \int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ なので $\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$，よって

$$\int\sin x\,dx = \int\left\{\frac{d}{dx}(-\cos x)\right\}dx = -\cos x+C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

反比例 $\frac{1}{x}$（$x\neq 0$）の不定積分 $\int\frac{1}{x}dx$ を求める．反比例 $\frac{1}{x}$ の原始関数，つまり $\frac{d}{dx}F(x) = \frac{1}{x}$ である関数 $F(x)$ が分かれば，

$$\int\frac{1}{x}dx = \int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$ なので，

$$\int\frac{1}{x}dx = \int\left(\frac{d}{dx}\ln|x|\right)dx = \ln|x|+C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

定数 $p$ について $p\neq -1$ とする．冪関数 $x^p$ の不定積分 $\int x^p dx$ を求める．冪関数 $x^p$ の原始関数，つまり $\frac{d}{dx}F(x) = x^p$ である関数 $F(x)$ が分かれば，

$$\int x^p dx = \int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

$\frac{d}{dx}x^{p+1} = (p+1)x^p$ なので，

$$x^p = \frac{1}{p+1}\frac{d}{dx}x^{p+1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{p+1}x^{p+1}\right).$$

このことより

$$\int x^p dx = \int\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{p+1}x^{p+1}\right)\right\}dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1}+C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

定数 $a$ について $a>0$ かつ $a\neq 1$ とする．指数関数 $a^x$ の不定積分 $\int a^x dx$ を求める．指数関数 $a^x$ の原始関数，つまり $\frac{d}{dx}F(x) = a^x$ である関数 $F(x)$ が分かれば，

$$\int a^x dx = \int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

$\frac{d}{dx}a^x = a^x\ln a$ なので

$$a^x = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}\frac{a^x}{\ln a}.$$

このことより

$$\int a^x dx = \int\left(\frac{d}{dx}\frac{a^x}{\ln x}\right)dx = \frac{a^x}{\ln a}+C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

0 以外の定数 $a$ に対して変数 $x$ の関数 $\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$ を微分する．変数 $y$ を $y=\frac{x}{a}$ とおく．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right) &= \frac{1}{a}\frac{d}{dx}\tan^{-1}y = \frac{1}{a}\frac{d}{dy}\tan^{-1}y\cdot\frac{dy}{dx}\\ &= \frac{1}{a}\frac{1}{1+y^2}\frac{d}{dx}\frac{x}{a} = \frac{1}{a}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\frac{1}{a} = \frac{1}{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)}\\ &= \frac{1}{x^2+a^2}.\end{aligned}$$

よって $\frac{1}{x^2+a^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right)$ なので，

$$\int\frac{1}{x^2+a^2}dx = \int\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right)\right\}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

正の定数 $a$ に対して変数 $x$ の関数 $\sin^{-1}\frac{x}{a}$ を微分する．変数 $y$ を $y=\frac{x}{a}$ とおく．$a>0$ なので $a=\sqrt{a^2}$．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sin^{-1}\frac{x}{a} &= \frac{d}{dx}\sin^{-1}y = \frac{d}{dy}\sin^{-1}y\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{d}{dx}\frac{x}{a}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.\end{aligned}$$

よって $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{d}{dx}\sin^{-1}\frac{x}{a}$ なので，

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \int\left(\frac{d}{dx}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)dx = \sin^{-1}\frac{x}{a}+C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

このようにして以下の積分公式が導かれる．

> （積分公式）　以下の公式において $C$ は積分定数を表す．
>
> 定数 $k$ に対して $\int k\,dx = kx+C$．
>
> 定数 $p$ に対して，$p\neq 1$ のとき $\int x^p dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1}+C$．
>
> $$\int\frac{1}{x}dx = \ln|x|+C.$$
>
> 定数 $a$ に対して，$a>0$ かつ $a\neq 1$ のとき $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C$．
>
> $$\int\sin x\,dx = -\cos x+C.$$
>
> $$\int\cos x\,dx = \sin x+C.$$
>
> $$\int\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int\sec^2 x\,dx = \tan x+C.$$
>
> 定数 $a$ に対して，$a\neq 0$ のとき $\int\frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+C$．
>
> 定数 $a$ に対して，$a>0$ のとき $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \sin^{-1}\frac{x}{a}+C$．

**例**　積分定数を $C$ とおく．$-1$ 以外の定数 $p$ について $\int x^p dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1}+C$．この公式を用いる．

$$\int x^4 dx = \frac{1}{4+1}x^{4+1}+C = \frac{1}{5}x^5+C.$$

$$\int\frac{1}{y^4}dy = \int y^{-4}dy = \frac{1}{-4+1}y^{-4+1}+C = -\frac{1}{3}y^{-3} = -\frac{1}{3y^3}+C.$$

$$\int\sqrt{u}\,du = \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}u^{\frac{1}{2}+1}+C = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{3}\sqrt{u}^3+C.$$

終

**問題 6.5.1**　不定積分 $\int\frac{1}{x^5}dx$ を計算せよ．

**問題 6.5.2**　不定積分 $\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt$ を計算せよ．

**例題**　不定積分 $\int e^{3x}dx$ を計算する．

積分定数を $C$ とおく．定数 $a$ について $a>0$ かつ $a\neq 1$ のとき $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C$．

$$\int e^{3x}dx = \int(e^3)^x dx = \frac{(e^3)^x}{\ln e^3}+C = \frac{e^{3x}}{3}+C.$$

終

**問題 6.5.3**　不定積分 $\int e^{\frac{x}{4}}dx$ を計算せよ．

**例題**　不定積分 $\int\frac{1}{y^2+\frac{3}{4}}dy$ を計算する．

積分定数を $C$ とおく．0 以外の定数 $a$ について $\int\frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+C$．

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{y^2+\frac{3}{4}}dy &= \int\frac{1}{y^2+\sqrt{\frac{3}{4}}^2}dy = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\tan^{-1}\frac{y}{\sqrt{\frac{3}{4}}}+C\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2y}{\sqrt{3}}+C.\end{aligned}$$

終

**問題 6.5.4**　不定積分 $\int\frac{1}{u^2+\frac{9}{7}}du$ 計算せよ．

**問題 6.5.5**　不定積分 $\int\frac{1}{\sqrt{5-y^2}}dy$ 計算せよ．