

## §6.9 定積分を用いる極限計算

実数  $a$  と  $b$  について  $a \leq b$  で、関数  $f$  の定義域は区間  $[a, b]$  を含み、 $f$  は  $a$  から  $b$  まで定積分可能であるとする。正の各自然数  $n$  に対して、

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  をとる。

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

について  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$  とする。定積分の定義より、自然数  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  に対して  $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$  である実数  $\xi_k$  をどのように定めても、リーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$  の極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  は変わらない。そこで、 $\xi_k = x_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ) とすると、リーマン和  $S_n$  は

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\}.$$

また別に、 $\xi_k = x_{k-1}$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ) とすると、リーマン和  $S_n$  は

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}.$$

関数  $f$  の定積分を計算するために、しばしば、 $f$  のリーマン和として

$$\sum_{k=1}^n \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\} \text{ あるいは } \sum_{k=1}^n \{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} \text{ を用いる.}$$

定積分はリーマン和の極限值である。微分積分の基本定理を用いると、多くの場合、リーマン和の極限值を計算するより、不定積分を用いて定積分を計算する方が楽である。それ故、逆に、リーマン和の極限值を計算するのに定積分を用いることがある。

**例題** 正の自然数を表す変数  $n$  の関数  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k+3}$  について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$  のときの極限值を調べる。

数列  $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$  を  $x_k = \frac{4}{n}k+3$  ( $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ ) と定める。この数列は公差が  $\frac{4}{n}$  の等差数列であり、

$$3 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7.$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$  について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{4}{n}$  なので  $\frac{1}{n} = \frac{x_k - x_{k-1}}{4}$ 。

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k+3} &= \sum_{k=1}^n \left( \sqrt{x_k} \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^n \left( \sqrt{x_k} \frac{x_k - x_{k-1}}{4} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\sqrt{x_k}}{4} (x_k - x_{k-1}) \right\}. \end{aligned}$$

これは関数  $\frac{\sqrt{x}}{4}$  のリーマン和である。 $k = 1, 2, 3, \dots, n$  について  $x_k - x_{k-1} = \frac{4}{n}$  なので

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{4}{n};$$

これは  $n \rightarrow \infty$  のとき 0 に収束する。よって関数  $\frac{\sqrt{x}}{4}$  のリーマン和

$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k+3} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\sqrt{x_k}}{4} (x_k - x_{k-1}) \right\}$  は  $n \rightarrow \infty$  のとき定積分  $\int_3^7 \frac{\sqrt{x}}{4} dx$  に収束する。故に、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k+3} \right) &= \int_3^7 \frac{\sqrt{x}}{4} dx = \frac{1}{4} \int_3^7 x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{4} \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_3^7 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} (7\sqrt{7} - 3\sqrt{3}) \\ &= \frac{7\sqrt{7}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \quad \text{終}$$

**問題 6.9.1** 正の自然数を表す変数  $n$  の関数  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{5}{n}k+2}$  について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$  のときの極限值を調べよ。

**例題** 正の自然数を表す変数  $n$  の関数  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6} \right\}$  について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$  のときの極限值を調べる。

数列  $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$  を  $x_k = \frac{3\pi}{2n}k - \frac{\pi}{6}$  ( $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ ) と定める；この数列は公差が  $\frac{3\pi}{2n}$  の等差数列であり、

$$-\frac{\pi}{6} = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = \frac{4\pi}{3}.$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$  について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{3\pi}{2n}$  なので  $\frac{1}{n} = \frac{2(x_k - x_{k-1})}{3\pi}$ 。

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6} \right\} &= \sum_{k=1}^n \left( \cos x_{k-1} \cdot \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^n \left\{ \cos x_{k-1} \cdot \frac{2(x_k - x_{k-1})}{3\pi} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2 \cos x_{k-1}}{3\pi} (x_k - x_{k-1}) \right\}. \end{aligned}$$

これは関数  $\frac{2 \cos x}{3\pi}$  のリーマン和である。 $k = 1, 2, 3, \dots, n$  について  $x_k - x_{k-1} = \frac{3\pi}{2n}$  なので、

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3\pi}{2n};$$

これは  $n \rightarrow \infty$  のとき 0 に収束する。よって関数  $\frac{2 \cos x}{3\pi}$  のリーマン和

$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6} \right\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2 \cos x_{k-1}}{3\pi} (x_k - x_{k-1}) \right\}$  は  $n \rightarrow \infty$  のとき定積分

$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{2 \cos x}{3\pi} dx$  に収束する。故に、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6} \right\} \right] &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{2 \cos x}{3\pi} dx = \frac{2}{3\pi} [\sin x]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}} \\ &= \frac{2}{3\pi} \left\{ \sin \frac{4\pi}{3} - \sin \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right\} = \frac{2}{3\pi} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1 - \sqrt{3}}{3\pi}. \end{aligned} \quad \text{終}$$

**問題 6.9.2** 正の自然数を表す変数  $n$  の関数  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \left\{ \frac{7\pi}{6n}(k-1) - \frac{\pi}{3} \right\}$  について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$  のときの極限值を調べよ。

**例題** 正の自然数を表す変数  $n$  の関数  $\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n}$  について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$  のときの極限值を調べる。

自然数  $k$  に対して

$$\frac{6}{3k+4n} = \frac{6}{n \left( \frac{3k}{n} + 4 \right)} = \frac{1}{n} \frac{6}{\frac{3}{n}k + 4}.$$

数列  $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$  を  $x_k = \frac{3}{n}k + 4$  ( $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ ) と定める。この数列は公差が  $\frac{3}{n}$  の等差数列であり、

$$4 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7.$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$  について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{3}{n}$  なので  $\frac{1}{n} = \frac{x_k - x_{k-1}}{3}$ 。

$$\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{6}{3} \frac{1}{\frac{3}{n}k + 4} \right) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{6}{x_k} \frac{x_k - x_{k-1}}{3} \right) = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2}{x_k} (x_k - x_{k-1}) \right\}.$$

これは関数  $\frac{2}{x}$  のリーマン和である。 $k = 1, 2, 3, \dots, n$  について  $x_k - x_{k-1} = \frac{3}{n}$  なので、

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n};$$

これは  $n \rightarrow \infty$  のとき 0 に収束する。よって、関数  $\frac{2}{x}$  のリーマン和

$\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2}{x_k} (x_k - x_{k-1}) \right\}$  は  $n \rightarrow \infty$  のとき定積分  $\int_4^7 \frac{2}{x} dx$  に収束する。故に、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n} &= \int_4^7 \frac{2}{x} dx = 2[\ln|x|]_4^7 = 2(\ln 7 - \ln 4) = 2 \ln \frac{7}{4} = \ln \left( \frac{7}{4} \right)^2 \\ &= \ln \frac{49}{16}. \end{aligned} \quad \text{終}$$

**問題 6.9.3** 正の自然数を表す変数  $n$  の関数  $\sum_{k=1}^n \frac{8}{4k+3n}$  について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$  のときの極限值を調べよ。