第6章の補遺3　関数の値の平均

$\boxed{\text{例}}$　正弦関数 $\sin x$ の値の 0 以上の π 以下の区間の“平均”を考える．正の自然数を表す変数 n に対して，等差数列を成す n 個の実数

$$\frac{\pi}{n},\quad \frac{2\pi}{n},\quad \frac{3\pi}{n},\quad \frac{4\pi}{n},\quad \ldots,\quad \frac{(n-1)\pi}{n},\quad \frac{n\pi}{n} = \pi$$

の各々における正弦関数の値

$$\sin\frac{\pi}{n},\ \sin\frac{2\pi}{n},\ \sin\frac{3\pi}{n},\ \sin\frac{4\pi}{n},\ \ldots,\ \sin\frac{(n-1)\pi}{n},\ \sin\pi$$

を合計して n で割った値

$$\frac{\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}+\sin\pi}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi k}{n}}{n}$$

が近似的に正弦関数 $\sin x$ の値の 0 以上の π 以下の区間の平均だと考える；そして $n\to\infty$ のとき $\dfrac{\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi k}{n}}{n}$ が収束するならば，極限値 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi k}{n}}{n}$ が関数 $\sin x$ の値の 0 以上の π 以下の区間の平均であると考える．自然数 $k=0,1,2,3,\ldots,n$ に対して $x_k=\dfrac{\pi k}{n}$ とおく．

$$0 = x_0 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le x_n = \pi\ .$$

数列 $\{x_k\}_{0\le k\le n}$ は公差が $\dfrac{\pi}{n}$ の等差数列なので，

$$\max\{x_1-x_0, x_2-x_1, x_3-x_2, \ldots, x_n-x_{n-1}\} = \frac{\pi}{n}\ ,$$

これは $n\to\infty$ のとき 0 に収束する．自然数 $k=1,2,3,\ldots,n$ について，$x_k-x_{k-1}=\dfrac{\pi}{n}$ なので $\dfrac{1}{n}=\dfrac{x_k-x_{k-1}}{\pi}$ ．

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi k}{n}}{n} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sin x_k\cdot\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sin x_k\cdot\frac{x_k-x_{k-1}}{\pi}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\sin x_k}{\pi}(x_k-x_{k-1})\right\}\ .\end{aligned}$$

これは関数 $\dfrac{\sin x}{\pi}$ のリーマン和である．関数 $\dfrac{\sin x}{\pi}$ は積分可能なので，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\sin x_k}{\pi}(x_k-x_{k-1})\right\} &= \int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\pi}\,dx = \frac{1}{\pi}\big[-\cos x\big]_0^{\pi}\\ &= \frac{1}{\pi}\{-\cos\pi-(-\cos 0)\} = \frac{1}{\pi}\{-(-1)-(-1)\}\\ &= \frac{2}{\pi}\ .\end{aligned}$$

故に

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi k}{n}}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\sin x_k}{\pi}(x_k-x_{k-1})\right\} = \frac{2}{\pi}\ .$$

正弦関数 $\sin x$ の値の 0 以上の π 以下の区間の平均は $\dfrac{2}{\pi}$ である．　$\boxed{\text{終}}$

一般的に，実数 a と b とについて $a\le b$ であり，関数 f が a から b まで積分可能であるとき，a 以上 b 以下の区間 $[a,b]$ における f の値の平均は $\dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ であると考える．