# 第6章の補遺4　もう一つの微分積分の基本定理

　実数 $a$ が属す区間 $I$ において関数 $f$ が連続であるとする． $f(x)$ の不定積分 $F(x)=\int f(x)\,dx$ がある． 区間 $I$ の各点 $x$ に対して，$f$ は $a$ から $x$ まで定積分可能である． 6.4節の微分積分の基本定理より，

$$\int_a^x f(t)\,dt = \big[F(t)\big]_a^x = F(x)-F(a)\ .$$

これを微分する． $\dfrac{d}{dx}F(x)=\dfrac{d}{dx}\int f(x)\,dx=f(x)$ なので，

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\{F(x)-F(a)\} = \frac{d}{dx}F(x)-\frac{d}{dx}F(a) = f(x)\ .$$

つまり $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$ ．

**定理**　実数 $a$ が属す区間 $I$ において，関数 $f$ が連続であるならば

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)\ .$$

　この定理はここでは6.4節の微分積分の基本定理を用いて証明した． しかし，先にこの定理を証明して，この定理を用いて6.4節の微分積分の基本定理を証明するやり方もある． そのためこの定理も微分積分の基本定理といわれることがある．

例　実数全体を定義域とする関数 $F$ を $F(x)=\int_0^x\sqrt{t^2+3}\,dt$ と定める． $F$ の導関数 $F'$ を求める．

$$F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x\sqrt{t^2+3}\,dt = \sqrt{x^2+3}\ .$$

問題 6.補遺4.1　正の実数の全体を定義域とする関数 $F$ を $F(x)=\int_1^x(\ln t)^3\,dt$ と定める． $F$ の導関数 $F'$ を求めよ．

例題　区間 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 $F$ を $F(x)=\int_0^{\sin x}\sin^{-1}t\,dt$ と定める． $F$ の導関数 $F'$ を求める．

　変数 $x$ について $-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ とする． 変数 $y$ を $y=\sin x$ とおく．

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^{\sin x}\sin^{-1}t\,dt = \frac{d}{dx}\int_0^y\sin^{-1}t\,dt\ .$$

合成関数の微分法により，

$$\frac{d}{dx}\int_0^y\sin^{-1}t\,dt = \frac{d}{dy}\int_0^y\sin^{-1}t\,dt\cdot\frac{dy}{dx} = \sin^{-1}y\cdot\frac{d}{dx}\sin x = \sin^{-1}(\sin x)\cdot\cos x\ .$$

$-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ なので $\sin^{-1}(\sin x)=x$ ． 故に $F'(x)=x\cos x$ ．

問題 6.補遺4.2　区間 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ を定義域とする関数 $F$ を $F(x)=\int_0^{\tan x}\tan^{-1}t\,dt$ と定める． $F$ の導関数 $F'$ を求めよ．

例題　変数 $x$ の関数 $\int_0^x(\sin t^2+\sin x^2)\,dt$ を微分する．

$$\frac{d}{dx}\sin x^2 = \cos x^2\cdot\frac{d}{dx}x^2 = \cos x^2\cdot 2x = 2x\cos x^2\ .$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_0^x(\sin t^2+\sin x^2)\,dt &= \frac{d}{dx}\Big(\int_0^x\sin t^2\,dt+\int_0^x\sin x^2\,dt\Big)\\ &= \frac{d}{dx}\int_0^x\sin t^2 dt+\frac{d}{dx}\Big\{(\sin x^2)\int_0^x 1\,dt\Big\}\\ &= \sin x^2+\frac{d}{dx}(x\sin x^2)\\ &= \sin x^2+\frac{d}{dx}x\cdot\sin x^2+x\cdot\frac{d}{dx}\sin x^2\\ &= \sin x^2+\sin x^2+x\cdot 2x\cos x^2\\ &= 2\sin x^2+2x^2\cos x^2\ .\end{aligned}$$

問題 6.補遺4.3　正の実数を表す変数 $x$ の関数 $\int_1^x\ln\{x(t^2+1)\}\,dt$ を微分せよ．