§7.1　微分

変数の微分という新しい概念を考える．独立変数[1] x の微分とは新しい一つの変数 dx のことである．独立変数 x の微分 dx について $dx \neq 0$ とする．また，独立変数 x 及び微分可能な関数 φ に対して，$\varphi(x)$ の微分 $d\varphi(x)$ を次のように定義する：

$$d\varphi(x) = \varphi'(x)\,dx \ .$$

従って，従属変数 y を $y=\varphi(x)$ とおくと，y の微分 dy は次のようになる：

$$dy = d\varphi(x) = \varphi'(x)\,dx \ .$$

独立変数 x 及び微分可能な関数 φ に対して従属変数 y を $y=\varphi(x)$ とおく．このとき，微分係数 $\dfrac{dy}{dx}$ は次のようになる：

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\varDelta x \to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \lim_{\varDelta x \to 0}\frac{\varphi(x+\varDelta x)-\varphi(x)}{\varDelta x} = \varphi'(x) \ .$$

つまり，$\dfrac{dy}{dx}$ は，分数と同じ形をしているが，商 $\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x}$ の極限値であって商ではない．しかし，変数 x の微分 dx と変数 y の微分 dy とを考えると，微分係数 $\dfrac{dy}{dx}$ はあたかも dy を dx で割るときの商であるかのように計算できる．このことを述べたのが次の定理である．

定理　独立変数 x 及び微分可能な関数 φ に対して，従属変数 y を $y=\varphi(x)$ とおくとき，関数 f と g 及び微分係数 $\dfrac{dy}{dx}$, 変数 x の微分 dx, 変数 y の微分 dy について，

$$g(y)\,\frac{dy}{dx} = f(x) \iff g(y)\,dy = f(x)\,dx \ .$$

証明　$y=\varphi(x)$ なので，

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) \ , \qquad dy = d\varphi(x) = \varphi'(x)\,dx \ .$$

$g(y)\,\dfrac{dy}{dx} = f(x)$ とする．$\dfrac{dy}{dx} = \varphi'(x)$ なので，$g(y)\,\varphi'(x) = f(x)$ ；両辺に dx を掛けると $g(y)\,\varphi'(x)\,dx = f(x)\,dx$ ；$\varphi'(x)\,dx = dy$ なので，$g(y)\,dy = f(x)\,dx$ ．

逆に $g(y)\,dy = f(x)\,dx$ とする．$dy = \varphi'(x)\,dx$ なので，$g(y)\,\varphi'(x)\,dx = f(x)\,dx$ ；独立変数 x について $dx \neq 0$ なので，$g(y)\,\varphi'(x) = f(x)$ ；$\varphi'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ なので，$g(y)\,\dfrac{dy}{dx} = f(x)$ ．　（証明終り）

---

[1] 関数 φ に対して $y=\varphi(x)$ となる変数 x と y とを考えるとき，x を独立変数といい，y を従属変数といった．独立変数の値は私達が自由に決めることができるが，独立変数の値を決めると従属変数の値は自動的に決まってしまう．