§7.2　不定積分の置換積分法

合成関数の微分公式（定理3.5）より次の定理が導かれる．

> **定理**（不定積分の置換積分法）　関数 $f(x)$ と $g(y)$ との定義域は区間であり $g(y)$ の不定積分 $\int g(y)\,dy$ があるとする． 変数 y は変数 x の微分可能な関数であるとする． x, y 及びそれらの微分 dx, dy について，
>
> $$f(x)\,dx = g(y)\,dy \ \text{ ならば } \ \int f(x)\,dx = \int g(y)\,dy \ .$$

証明　関数 $f(x)$ と $g(y)$ との定義域は区間であり $g(y)$ の不定積分 $G(y) = \int g(y)\,dy$ があるとする． 変数 y は変数 x の微分可能な関数であるとする． 定理6.4.3より $\frac{d}{dy}G(y) = \frac{d}{dy}\left\{\int g(y)\,dy\right\} = g(y)$ なので，合成関数の微分公式（定理3.5）より，

$$\frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y)\cdot\frac{dy}{dx} = g(y)\,\frac{dy}{dx} \ .$$

変数 x, y 及びそれらの微分 dx, dy について， $g(y)\,dy = f(x)\,dx$ とすると， $g(y)\,\frac{dy}{dx} = f(x)$ なので

$$\frac{d}{dx}G(y) = f(x) \ ,$$

積分定数を C とおくと，定理6.4.4より $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}G(y)\right\}dx = G(y) + C$ なので，

$$\int f(x)\,dx = \int\left\{\frac{d}{dx}G(y)\right\}dx = G(y) + C = \int g(y)\,dy + C \ .$$

積分定数を略すと，$f(x)\,dx = g(y)\,dy$ ならば $\int f(x)\,dx = \int g(y)\,dy$ ．　　　　（証明終り）

この置換積分法の公式において次のことに注意すること： $f(x)$ は変数として x だけを含む（ y を含まない）式であり，$g(y)$ は変数として y だけを含む（ x を含まない）式である．

例解　3.5節で述べたように，微分公式 $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ を適用できるのは， $\frac{d}{dx}$ の横線の下側の変数 x が $\sin$ の中身と一致するときである．

$$\frac{d}{d\boxed{x}}\sin\boxed{x} = \cos x \ , \qquad \frac{d}{d\boxed{t}}\sin\boxed{t} = \cos t \ .$$

一致　　　　一致

同様に，積分公式 $\int \cos x\,dx = \sin x + C$（ C は積分定数）を適用できるのは， cos の中身が積分変数であるときである．

$$\int \cos\boxed{x}\,d\boxed{x} = \sin x + C \ , \qquad \int \cos\boxed{y}\,d\boxed{y} = \sin y + C \ .$$

一致　　　　一致

変数 x の関数 $\cos(3x+2)$ の不定積分 $\int \cos(3x+2)\,dx$ を計算するには，このままでは積分公式 $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ を適用できない． そこで次のように計算する．

変数 y を $y = 3x+2$ とおく． $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3x+2) = 3$ なので， $dy = 3\,dx$ ， $dx = \frac{1}{3}\,dy$ ，よって

$$\cos(3x+2)\,dx = (\cos y)\,\frac{1}{3}\,dy \ .$$

この計算は省いてもよい． 積分定数を C とおく． 置換積分法により，

$$\begin{aligned}\int \cos(3x+2)\,dx &= \int (\cos y)\,\frac{1}{3}\,dy = \frac{1}{3}\int \cos y\,dy = \frac{1}{3}\sin y + C \\ &= \frac{1}{3}\sin(3x+2) + C \ .\end{aligned}$$

終

問題 7.2.1　不定積分 $\int \sin(5x-4)\,dx$ を計算せよ．

例題　不定積分 $\displaystyle\int \frac{7}{(2y+1)^4}\,dy$ を計算する．

〔解説〕 変数 z を $z = 2y+1$ とおく． $\frac{dz}{dy} = \frac{d}{dy}(2y+1) = 2$ なので， $dz = 2\,dy$ ， $dy = \frac{1}{2}\,dz$ ，よって

$$\frac{7}{(2y+1)^4}\,dy = \frac{7}{z^4}\,\frac{1}{2}\,dz \ .$$

この等式は省いてもよい． 積分定数を C とおく． 置換積分法により，

$$\begin{aligned}\int \frac{7}{(2y+1)^4}\,dy &= \int \frac{7}{z^4}\,\frac{1}{2}\,dz = \frac{7}{2}\int z^{-4}\,dz = \frac{7}{2}\,\frac{1}{-3}z^{-3} + C = -\frac{7}{6z^3} + C \\ &= -\frac{7}{6(2y+1)^3} + C \ .\end{aligned}$$

終

問題 7.2.2　不定積分 $\displaystyle\int \frac{9}{(4y+5)^3}\,dy$ を計算せよ．

例題　不定積分 $\displaystyle\int \frac{7}{5u+3}\,du$ を計算する．

〔解説〕 変数 v を $v = 5u+3$ とおく． $\frac{dv}{du} = 5$ なので， $dv = 5\,du$ ， $du = \frac{1}{5}\,dv$ ．よって

$$\frac{7}{5u+3}\,du = \frac{7}{v}\,\frac{1}{5}\,dv \ .$$

この等式は省いてもよい． 積分定数を C とおく． 置換積分法により，

$$\int \frac{7}{5u+3}\,du = \int \frac{7}{v}\,\frac{1}{5}\,dv = \frac{7}{5}\int \frac{1}{v}\,dv = \frac{7}{5}\ln|v| + C = \frac{7}{5}\ln|5u+3| + C \ .$$

終

問題 7.2.3　不定積分 $\displaystyle\int \frac{9}{4u+5}\,du$ を計算せよ．

問題 7.2.4　不定積分 $\int \sqrt{6x+5}\,dx$ を計算せよ．

例題　不定積分 $\displaystyle\int \cos\frac{4t-5}{3}\,dt$ を計算する．

〔解説〕 変数 x を $x = \frac{4t-5}{3}$ とおく． $\frac{dx}{dt} = \frac{4}{3}$ なので， $dx = \frac{4}{3}\,dt$ ， $dt = \frac{3}{4}\,dx$ ．よって

$$\cos\frac{4t-5}{3}\,dt = (\cos x)\,\frac{3}{4}\,dx \ .$$

この等式は省いてもよい． 積分定数を C とおく． 置換積分法により，

$$\begin{aligned}\int \cos\frac{4t-5}{3}\,dt &= \int (\cos x)\,\frac{3}{4}\,dx = \frac{3}{4}\int \cos x\,dx = \frac{3}{4}\sin x + C \\ &= \frac{3}{4}\sin\frac{4t-5}{3} + C \ .\end{aligned}$$

終

問題 7.2.5　不定積分 $\displaystyle\int \sin\frac{3x-7}{5}\,dx$ を計算せよ．

問題 7.2.6　不定積分 $\int e^{\frac{2t+3}{5}}\,dt$ を計算せよ．

例題　不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx$ を計算する．

〔解説〕 変数 y を $y = x^2+1$ とおく． $\frac{dy}{dx} = 2x$ なので $x\,dx = \frac{1}{2}\,dy$ ． よって

$$\frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{1}{(x^2+1)^3}\,x\,dx = \frac{1}{y^3}\,\frac{1}{2}\,dy \ .$$

この等式は省いてもよい． 積分定数を C とおく． 置換積分法により，

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx &= \int \frac{1}{y^3}\,\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\int y^{-3}\,dy = \frac{1}{2}\,\frac{1}{-2}y^{-2} + C = -\frac{1}{4y^2} + C \\ &= -\frac{1}{4(x^2+1)^2} + C \ .\end{aligned}$$

終

問題 7.2.7　不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx$ を計算せよ．

例題　不定積分 $\int x^2\sqrt{x^3-5}\,dx$ を計算する．

〔解説〕 変数 y を $y = x^3-5$ とおく． $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ なので $x^2\,dx = \frac{1}{3}\,dy$ ． よって

$$x^2\sqrt{x^3-5}\,dx = \sqrt{x^3-5}\,x^2dx = \sqrt{y}\,\frac{1}{3}\,dy \ .$$

この等式は省いてもよい． 積分定数を C とおく． 置換積分法により，

$$\int x^2\sqrt{x^3-5}\,dx = \int \sqrt{y}\,\frac{1}{3}\,dy = \frac{1}{3}\int y^{\frac{1}{2}}\,dy = \frac{1}{3}\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9}\sqrt{x^3-5}^{\,3} + C \ .$$

終

問題 7.2.8　不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+2}\,dx$ を計算せよ．

例　置換積分法により不定積分 $\int (x+1)^2dx$ を計算する． 変数 y を $y = x+1$ とおく． $\frac{dy}{dx} = 1$ なので $dx = dy$ ． 積分定数を C_0 とおく．

$$\int (x+1)^2dx = \int y^2dy = \frac{1}{3}y^3 + C = \frac{1}{3}(x+1)^3 + C_1 = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + \frac{1}{3} + C_0 \ ;$$

ここで， $C = \frac{1}{3} + C_0$ とおくと， $\int (x+1)^2dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + C$ ； C_0 は定数であるので C も定数である． この定数 C を積分定数と考えると次のようになる：

$$\int (x+1)^2dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + C \quad (C \text{ は積分定数}) \ .$$

終

このように，不定積分の計算に現れる定数項は一つの積分定数にまとめることが望ましい．