§7.3　定積分の置換積分法

合成関数の微分公式（定理3.5）より次の定理が導かれる．

> **定理**（定積分の置換積分法）　変数 x の関数 y は実数 a と b が属すある区間において微分可能であるとする． 関数 f は a から b まで定積分可能であり，関数 g は実数 p から実数 q まで定積分可能であるとする．
>
> $x=a$ のとき $y=p$ ，$x=b$ のとき $y=q$ ，$f(x)\,dx=g(y)\,dy$　ならば
> $$\int_a^b f(x)\,dx=\int_p^q g(y)\,dy\ .$$

証明　変数 x の関数 $y=\varphi(x)$ は実数 a と b が属すある区間において微分可能であるとする． 関数 f は a から b まで定積分可能であるとする． 関数 g は $p=\varphi(a)$ から $q=\varphi(b)$ まで定積分可能であり，g の原始関数 G があるとする．$\dfrac{d}{dy}G(y)=g(y)$ ． 合成関数 $G\bigl(\varphi(x)\bigr)=G(y)$ を x で微分する． 合成関数の微分公式より，

$$\frac{d}{dx}G\bigl(\varphi(x)\bigr)\,=\,\frac{d}{dx}G(y)\,=\,\frac{d}{dy}G(y)\cdot\frac{dy}{dx}\,=\,g(y)\,\frac{dy}{dx}\ .$$

$f(x)\,dx=g(y)\,dy$ とすると，$g(y)\,\dfrac{dy}{dx}=f(x)$ なので，$\dfrac{d}{dx}G\bigl(\varphi(x)\bigr)=f(x)$ ，微分積分の基本定理より，

$$\int_a^b f(x)\,dx\,=\,G\bigl(\varphi(b)\bigr)-G\bigl(\varphi(a)\bigr)\,=\,G(q)-G(p)\ ,$$

$$\int_p^q g(y)\,dy\,=\,G(q)-G(p)\ ,$$

故に $\int_a^b f(x)\,dx=\int_p^q g(y)\,dy$ ． つまり，$x=a$ のとき $y=\varphi(a)=p$ であり，$x=b$ のとき $y=\varphi(b)=q$ であるとき，$f(x)\,dx=g(y)\,dy$ ならば $\int_a^b f(x)\,dx=\int_p^q g(y)\,dy$ ．

（証明終り）

定積分の置換積分では積分の上端と下端も変わることに注意すること．

例題　定積分 $\displaystyle\int_0^4\frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$ を計算する．

〔解説〕 変数 y を $y=2x+1$ とおく．$\dfrac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\dfrac{1}{2}\,dy$ ． よって

$$\frac{1}{(2x+1)^3}\,dx\,=\,\frac{1}{y^3}\,\frac{1}{2}\,dy\ .$$

この等式は省いてもよい． $y=2x+1$ より，$x=0$ のとき $y=1$ ，$x=4$ のとき $y=9$ ． 置換積分法により，

$$\begin{aligned}\int_0^4\frac{1}{(2x+1)^3}\,dx&=\int_1^9\frac{1}{y^3}\,\frac{1}{2}\,dy=\frac{1}{2}\int_1^9 y^{-3}\,dy=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{-2}y^{-2}\right]_1^9=-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{y^2}\right]_1^9\\&=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{81}-1\right)=\frac{20}{81}\ .\end{aligned}$$

不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$ を計算してから微分積分の基本定理を適用しても計算できる． 積分定数を C とおくと

$$\int\frac{1}{(2x+1)^3}\,dx\,=\,\int\frac{1}{y^3}\,\frac{1}{2}\,dy\,=\,\frac{1}{2}\int y^{-3}dy\,=\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{-2}y^{-2}+C\,=\,-\frac{1}{4(2x+1)^2}+C\ ,$$

$$\begin{aligned}\int_0^4\frac{1}{(2x+1)^3}\,dx&=\left[-\frac{1}{4(2x+1)^2}\right]_0^4=-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(2x+1)^2}\right]_0^4=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9^2}-\frac{1}{1^2}\right)\\&=\frac{20}{81}\ .\end{aligned}$$

終

問題 7.3.1　定積分 $\displaystyle\int_2^4\frac{6}{(3y-5)^2}\,dy$ を計算しなさい．

例題　定積分 $\displaystyle\int_3^5\sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy$ を計算する．

〔解説〕 変数 z を $z=\dfrac{\pi(y-2)}{3}$ とおく．$\dfrac{dz}{dy}=\dfrac{\pi}{3}$ なので $dy=\dfrac{3}{\pi}\,dz$ ． よって

$$\sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy\,=\,(\sin z)\,\frac{3}{\pi}\,dz\ .$$

この等式は省いてもよい． $z=\dfrac{\pi(y-2)}{3}$ より，$y=3$ のとき $z=\dfrac{\pi}{3}$ ，$y=5$ のとき $z=\pi$ ． 置換積分法により，

$$\begin{aligned}\int_3^5\sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy&=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin z)\,\frac{3}{\pi}\,dz=\frac{3}{\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin z\,dz=\frac{3}{\pi}\bigl[-\cos z\bigr]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\\&=\frac{3}{\pi}\left(-\cos\pi+\cos\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{\pi}\left(1+\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{9}{2\pi}\ .\end{aligned}$$

終

問題 7.3.2　定積分 $\displaystyle\int_0^3\sin\frac{\pi(5x-3)}{6}\,dx$ を計算せよ．

問題 7.3.3　定積分 $\int_2^4 e^{2u-5}\,du$ を計算せよ．

例題　定積分 $\int_{-1}^2 x\sqrt{x^2+1}\,dx$ を計算する．

〔解説〕 変数 y を $y=x^2+1$ とおく．$\dfrac{dy}{dx}=2x$ なので $x\,dx=\dfrac{1}{2}\,dy$ ． よって

$$x\sqrt{x^2+1}\,dx\,=\,\sqrt{x^2+1}\,x\,dx\,=\,\sqrt{y}\,\frac{1}{2}\,dy\ .$$

この等式は省いてもよい． $x=-1$ のとき $y=2$ ，$x=2$ のとき $y=5$ ． 置換積分法により，

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 x\sqrt{x^2+1}\,dx&=\int_{-1}^2\sqrt{x^2+1}\,x\,dx=\int_2^5\sqrt{y}\,\frac{1}{2}\,dy\\&=\frac{1}{2}\int_2^5 y^{\frac{1}{2}}\,dy=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_2^5=\frac{1}{3}\bigl[y\sqrt{y}\bigr]_2^5\\&=\frac{1}{3}\bigl(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}\bigr)\ .\end{aligned}$$

終

問題 7.3.4　定積分 $\displaystyle\int_{-1}^2\frac{6x}{x^2+2}\,dx$ を計算せよ．

問題 7.3.5　定積分 $\displaystyle\int_0^4\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$ を計算せよ．