§7.5　有理関数の積分法

分母と分子とが整式である分数で表せる式を有理式という．関数の値が独立変数の有理式で表されるとき，その関数を有理関数という．

分子の整式の次数が分母の整式の次数より小さい分数式を真分数式という．分数式の分子の整式の次数が分母の整式の次数以上であるとき，

積分するためにはまずその分数式を整式と真分数式との和に分解する

ことが基本方針である．

$\boxed{\text{例題}}$　不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x^2-4x+2}{2x-1}\,dx$ を計算する．

〔解説〕 整式 $3x^2-4x+2$ を $2x-1$ で割るとき整商は $\dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{4}$ で剰余は $\dfrac{3}{4}$ なので，

$$3x^2-4x+2 = \left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\right)(2x-1)+\frac{3}{4}\ .$$

$$\begin{array}{r|rrr}
 & & \frac{3}{2}x & -\ \frac{5}{4} \\ \hline
2x-1 & 3x^2 & -\ 4x & +\ 2 \\
 & 3x^2 & -\frac{3}{2}x & \\ \cline{2-3}
 & & -\frac{5}{2}x & +\ 2 \\
 & & -\frac{5}{2}x & +\ \frac{5}{4} \\ \cline{3-4}
 & & & \frac{3}{4}
\end{array}$$

よって，

$$\begin{aligned}
\frac{3x^2-4x+2}{2x-1} &= \frac{\left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\right)(2x-1)+\frac{3}{4}}{2x-1} \\
&= \frac{3}{2}x-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\frac{1}{2x-1}\ .
\end{aligned}$$

従って，

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^2-4x+2}{2x-1}\,dx &= \int \left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\frac{1}{2x-1}\right)dx \\
&= \int \left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\right)dx+\frac{3}{4}\int \frac{1}{2x-1}\,dx\ .
\end{aligned}$$

変数 y を $y=2x-1$ とおく． $\dfrac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\dfrac{1}{2}\,dy$ ． 積分定数を C_0 とおく． 置換積分法により，

$$\int \frac{1}{2x-1}\,dx = \int \frac{1}{y}\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\ln|y|+C_0 = \frac{1}{2}\ln|2x-1|+C_0\ .$$

積分定数を C とおく．

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^2-4x+1}{2x-1}\,dx &= \int \left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\right)dx+\frac{3}{4}\int \frac{1}{2x-1}\,dx \\
&= \frac{3}{4}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{3}{8}\ln|2x-1|+C\ .
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.5.1}}$　不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x}{2x+5}\,dx$ を計算せよ．

$\boxed{\text{問題 7.5.2}}$　不定積分 $\displaystyle\int \frac{2x^2+5x}{2x-1}\,dx$ を計算せよ．