§7.7　三角関数が現われる式の積分法

i) $f(\sin x)\cos x$, $f(\cos x)\sin x$ の形の式の積分

関数 f に対して，不定積分 $\int f(\sin x)\cos x\,dx$ の計算には次のような置換積分を用いる：変数 x, y について $y=\sin x$ とおくと， $\dfrac{dy}{dx}=\cos x$ なので $\cos x\,dx=dy$ ，置換積分法により

$$\int f(\sin x)\cos x\,dx = \int f(y)\,dy \ .$$

同様に，不定積分 $\int f(\cos x)\sin x\,dx$ の計算には次のような置換積分を用いる：変数 x, y について $y=\cos x$ とおくと， $\dfrac{dy}{dx}=-\sin x$ なので $\sin x\,dx=-dy$ ，置換積分法により

$$\int f(\cos x)\sin x\,dx = \int f(y)(-dy) = -\int f(y)\,dy \ .$$

$\boxed{\text{例題}}$　不定積分 $\int \sin^3 t\cos t\,dt$ を計算する．

変数 x を $x=\sin t$ とおく． $\dfrac{dx}{dt}=\cos t$ なので $\cos t\,dt=dx$ ．積分定数を C とおく．置換積分法により，

$$\begin{aligned}\int \sin^3 t\cos t\,dt &= \int(\sin t)^3\cos t\,dt = \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4+C = \frac{1}{4}(\sin t)^4+C \\ &= \frac{1}{4}\sin^4 t + C \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.7.1}}$　不定積分 $\int(\cos^2 t+3)\sin t\,dt$ を計算せよ．

置換積分法によって正接関数 $\tan x$ の不定積分を求める． $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ ．変数 y を $y=\cos x$ とおく． $\dfrac{dy}{dx}=-\sin x$ なので $\sin x\,dx=-dy$ ．積分定数を C とおく．

$$\begin{aligned}\int \tan x\,dx &= \int\frac{\sin x}{\cos x}dx = \int\frac{1}{\cos x}\sin x\,dx = \int\frac{1}{y}(-dy) = -\int\frac{1}{y}dy = -\ln|y|+C \\ &= -\ln|\cos x|+C \ .\end{aligned}$$

（積分公式）

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x|+C \quad （C \text{ は積分定数}）.$$

$\boxed{\text{問題 7.7.2}}$　不定積分 $\displaystyle\int \tan\frac{y}{3}\,dy$ を計算せよ．

被積分関数を $f(\sin x)\cos x$ または $f(\cos x)\sin x$ の形の式に変形するために次の事実を用いることがある： $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ より，

$$\cos^2 x = 1-\sin^2 x \ , \qquad \sin^2 x = 1-\cos^2 x \ .$$

$\boxed{\text{例題}}$　不定積分 $\int\cos^3 x\,dx$ を計算する．

$\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ なので，

$$\cos^3 x = \cos^2 x\cos x = (1-\sin^2 x)\cos x \ .$$

変数 y を $y=\sin x$ とおく． $\dfrac{dy}{dx}=\cos x$ なので $\cos x\,dx=dy$ ．積分定数を C とおく．置換積分法により，

$$\begin{aligned}\int\cos^3 x\,dx &= \int(1-\sin^2 x)\cos x\,dx = \int(1-y^2)\,dy \\ &= y-\frac{1}{3}y^3+C = \sin x-\frac{1}{3}(\sin x)^3+C \\ &= \sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.7.3}}$　不定積分 $\int\sin^3 x\,dx$ を計算せよ．

正接関数 $\tan x$ が現われる式は，公式 $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ によって変形する．

$\boxed{\text{例題}}$　不定積分 $\int\tan x(1-\cos x)\,dx$ を計算する．

$$\tan x(1-\cos x) = \frac{\sin x}{\cos x}(1-\cos x) = \sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right) \ .$$

変数 y を $y=\cos x$ とおく． $\dfrac{dy}{dx}=-\sin x$ なので $\sin x\,dx=-dy$ ．積分定数を C とおく．置換積分法により，

$$\begin{aligned}\int\tan x(1-\cos x)\,dx &= \int\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)dx = \int\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)\sin x\,dx \\ &= \int\left(\frac{1}{y}-1\right)(-dy) = \int\left(1-\frac{1}{y}\right)dy = y-\ln|y|+C \\ &= \cos x-\ln|\cos x|+C \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.7.4}}$　不定積分 $\displaystyle\int\frac{\tan x}{\cos^2 x}dx$ を計算せよ．

定数 a, b に対して関数 $\sin x$ の 1 次式 $a\sin x+b$ 或いは関数 $\cos x$ の 1 次式 $a\cos x+b$ を置換することがある．

$\boxed{\text{例題}}$　不定積分 $\displaystyle\int\frac{\sin x}{3\cos x+5}dx$ を計算する．

変数 y を $y=3\cos x+5$ とおく． $\dfrac{dy}{dx}=-3\sin x$ なので， $\sin x\,dx=-\dfrac{1}{3}dy$ ．積分定数を C とおく．置換積分法により，

$$\begin{aligned}\int\frac{\sin x}{3\cos x+5}dx &= \int\frac{1}{y}\left(-\frac{1}{3}dy\right) = -\frac{1}{3}\int\frac{1}{y}dy = -\frac{1}{3}\ln|y|+C \\ &= -\frac{1}{3}\ln|3\cos x+5|+C \ .\end{aligned}$$

任意の実数 x について， $\cos x\geq -1$ なので， $3\cos x\geq -3$ ， $3\cos x+5\geq 2$ ，よって $|3\cos x+5|=3\cos x+5$ ．故に $\displaystyle\int\frac{\sin x}{3\cos x+5}dx=-\frac{1}{3}\ln(3\cos x+5)+C$ ．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.7.5}}$　不定積分 $\displaystyle\int\frac{\cos x}{5\sin x-7}dx$ を計算せよ．

ii) 三角関数の積の積分

正弦関数や余弦関数の積を積分するときは，以下の公式を用いて三角関数の積を和・差に変形する：任意の実数 a, b について，

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\{\cos(a+b)+\cos(a-b)\} \ ,$$

$$\sin a\sin b = -\frac{1}{2}\{\cos(a+b)-\cos(a-b)\} \ ,$$

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}\{\sin(a+b)+\sin(a-b)\} \ .$$

特に $a=b$ のとき，

$$\sin^2 a = \frac{1}{2}(1-\cos 2a) \ , \qquad \cos^2 a = \frac{1}{2}(1+\cos 2a) \ , \qquad \sin a\cos a = \frac{1}{2}\sin 2a \ .$$

$\boxed{\text{例題}}$　不定積分 $\int\cos^2 3t\,dt$ を計算する．

三角関数の公式より $\cos^2 3t=\dfrac{1}{2}(1+\cos 6t)$ なので，

$$\int\cos^2 3t\,dt = \int\frac{1}{2}(1+\cos 6t)\,dt = \frac{1}{2}\left(\int 1\,dt+\int\cos 6t\,dt\right) \ .$$

変数 x を $x=6t$ とおく． $\dfrac{dx}{dt}=6$ なので $dt=\dfrac{1}{6}dx$ ．積分定数を C_0 とおく．置換積分法により，

$$\int\cos 6t\,dt = \int\cos x\frac{1}{6}dx = \frac{1}{6}\sin x+C_0 = \frac{1}{6}\sin 6t+C_0 \ .$$

積分定数を C とおく．

$$\int\cos^2 3t\,dt = \frac{1}{2}\left(\int 1\,dt+\int\cos 6t\,dt\right) = \frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 6t}{6}\right)+C = \frac{t}{2}+\frac{\sin 6t}{12}+C \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.7.6}}$　不定積分 $\displaystyle\int\sin^2\frac{x}{6}\,dx$ を計算せよ．

$\boxed{\text{例題}}$　不定積分 $\int\sin(2x-3)\sin(5x+1)\,dx$ を計算する．

三角関数の公式より，

$$\begin{aligned}\sin(2x-3)\sin(5x+1) &= -\frac{1}{2}\{\cos(7x-2)-\cos(-3x-4)\} \\ &= -\frac{1}{2}[\cos(7x-2)-\cos\{-(3x+4)\}] \\ &= -\frac{1}{2}\{\cos(7x-2)-\cos(3x+4)\} \\ &= \frac{1}{2}\{\cos(3x+4)-\cos(7x-2)\} \ .\end{aligned}$$

変数 y を $y=3x+4$ とおき，変数 z を $z=7x-2$ とおく． $\dfrac{dy}{dx}=3$ なので $dx=\dfrac{1}{3}dy$ ， $\dfrac{dz}{dx}=7$ なので $dx=\dfrac{1}{7}dz$ ．積分定数を C とおく．置換積分法により，

$$\begin{aligned}\int\sin(2x-3)\sin(5x+1)\,dx &= \frac{1}{2}\int\{\cos(3x+4)-\cos(7x-2)\}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left\{\int\cos(3x+4)\,dx-\int\cos(7x-2)\,dx\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\int\cos y\frac{1}{3}dy-\int\cos z\frac{1}{7}dz\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sin y-\frac{1}{7}\sin z\right)+C \\ &= \frac{\sin(3x+4)}{6}-\frac{\sin(7x-2)}{14}+C \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.7.7}}$　不定積分 $\int\cos(2x-4)\cos(3x+2)\,dx$ を計算せよ．

$\boxed{\text{問題 7.7.8}}$　不定積分 $\int\sin(7-3y)\cos(5y-2)\,dy$ を計算せよ．積分定数を C とおく．