

## §7.8 1次式の根号を含む式の積分法

変数  $x$  の無理式  $\sqrt{ax+b}$  ( $a, b$  は定数で  $a \neq 0$ ) を含む式の積分には次のような置換積分を用いる: 変数  $t$  を  $t = \sqrt{ax+b}$  とおくと,  $t^2 = \sqrt{ax+b}^2 = ax+b$  なので  $x = \frac{t^2-b}{a}$ ; 従って  $\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{t^2-b}{a} = \frac{2}{a}t$  なので,  $dx = \frac{2}{a}t dt$ .

**例題** 不定積分  $\int \frac{3}{x\sqrt{4x-9}} dx$  を計算する.

変数  $t$  を  $t = \sqrt{4x-9}$  とおく.  $t^2 = 4x-9$  なので  $x = \frac{t^2+9}{4}$ .  $\frac{dx}{dt} = \frac{t}{2}$  なので  $dx = \frac{t}{2} dt$ , 積分定数を  $C$  とおく. 置換積分法により,

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{x\sqrt{4x-9}} dx &= \int \frac{3}{\frac{t^2+9}{4} \cdot t} dt = \int \frac{6}{t^2+9} dt = \frac{6}{3} \tan^{-1} \frac{t}{3} + C \\ &= 2 \tan^{-1} \frac{\sqrt{4x-9}}{3} + C.\end{aligned}$$

終

**問題 7.8.1** 不定積分  $\int \frac{3}{1+2\sqrt{3x+1}} dx$  を計算せよ.

**問題 7.8.2** 不定積分  $\int \frac{2y}{1+\sqrt{2y+1}} dy$  を計算せよ.