

§7.8 1次式の根号を含む式の積分法

変数 x の無理式 $\sqrt{ax+b}$ (a, b は定数で $a \neq 0$) を含む式の積分には次のような置換積分を用いる: 変数 t を $t = \sqrt{ax+b}$ とおくと, $t^2 = \sqrt{ax+b}^2 = ax+b$ なので $x = \frac{t^2-b}{a}$; 従って $\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{t^2-b}{a} = \frac{2}{a}t$ なので, $dx = \frac{2}{a}t dt$.

例題 不定積分 $\int \frac{3}{x\sqrt{4x-9}} dx$ を計算する.

変数 t を $t = \sqrt{4x-9}$ とおく. $t^2 = 4x-9$ なので $x = \frac{t^2+9}{4}$. $\frac{dx}{dt} = \frac{t}{2}$ なので $dx = \frac{t}{2} dt$, 積分定数を C とおく. 置換積分法により,

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{x\sqrt{4x-9}} dx &= \int \frac{3}{\frac{t^2+9}{4} \cdot t} dt = \int \frac{6}{t^2+9} dt = \frac{6}{3} \tan^{-1} \frac{t}{3} + C \\ &= 2 \tan^{-1} \frac{\sqrt{4x-9}}{3} + C.\end{aligned}$$

終

問題 7.8.1 不定積分 $\int \frac{3}{1+2\sqrt{3x+1}} dx$ を計算せよ.

問題 7.8.2 不定積分 $\int \frac{2y}{1+\sqrt{2y+1}} dy$ を計算せよ.