## § 7.9　2次式の根号を含む式の積分法

正の定数 $a$ に対して変数 $x$ の無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ で表される関数を積分するために，置換積分法を用いる．逆正弦関数について0.9節で次のことを述べた：：$-1\le X\le 1$ となる各実数 $X$ に対して $\sin^{-1}X$ の値が定義されて $-\frac{\pi}{2}\le\sin^{-1}X\le\frac{\pi}{2}$ ．無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ の値が実数である範囲で考えるので，$a^2-x^2\ge 0$ ，$x^2-a^2\le 0$ ，$(x+a)(x-a)\le 0$ ，$-a\le x\le a$ ．$-1\le\frac{x}{a}\le 1$ なので $\sin^{-1}\frac{x}{a}$ の値がある．変数 $t$ を $t=\sin^{-1}\frac{x}{a}$ とおく．$\sin t=\sin\left(\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)=\frac{x}{a}$ なので，$x=a\sin t$ ．$\sin^2 t+\cos^2 t=1$ より $1-\sin^2 t=\cos^2 t$ なので，

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-(a\sin t)^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}=\sqrt{a^2}\sqrt{1-\sin^2 t}$$
$$=a\sqrt{\cos^2 t}\ .$$

$-\frac{\pi}{2}\le\sin^{-1}\frac{x}{a}\le\frac{\pi}{2}$ つまり $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$ なので $\cos t\ge 0$ ，よって $\sqrt{\cos^2 t}=\cos t$ なので

$$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t\ .$$

また，$x=a\sin t$ より $\frac{dx}{dt}=a\cos t$ なので，$dx=(a\cos t)\,dt$ ．

**例解**　定積分 $\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx$ を計算する．

〔解説〕　$\sqrt{9-x^2}$ は実数なので，$9-x^2\ge 0$ ，$x^2-9\le 0$ ，$(x+3)(x-3)\le 0$ ，$-3\le x\le 3$ ．$-1\le\frac{x}{3}\le 1$ なので $\sin^{-1}\frac{x}{3}$ の値がある．変数 $t$ を $t=\sin^{-1}\frac{x}{3}$（$-3\le x\le 3$）とおく．$\sin t=\sin\left(\sin^{-1}\frac{x}{3}\right)=\frac{x}{3}$ なので $x=3\sin t$ ．$-\frac{\pi}{2}\le\sin^{-1}\frac{x}{3}\le\frac{\pi}{2}$ つまり $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$ なので $\cos t\ge 0$ ，よって

$$\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-(3\sin t)^2}=\sqrt{9(1-\sin^2 t)}=\sqrt{9}\sqrt{1-\sin^2 t}=3\sqrt{\cos^2 t}$$
$$=3\cos t\ .$$

$x=3\sin t$ より $\frac{dx}{dt}=3\cos t$ なので $dx=3\cos t\,dt$ ．$x=0$ のとき $t=\sin^{-1}0=0$ ．$x=3$ のとき $t=\sin^{-1}1=\frac{\pi}{2}$ ．故に，

$$\begin{aligned}\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos t)(3\cos t)\,dt=9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt\\&=9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt\\&=\frac{9}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}-0\right)\\&=\frac{9\pi}{4}\ .\end{aligned}$$

終

**問題 7.9.1**　定積分 $\int_1^2\sqrt{4-x^2}\,dx$ を計算せよ．

**例題**　定積分 $\int_0^1\sqrt{6-3x^2}\,dx$ を計算する．

〔解説〕　$\sqrt{6-3x^2}$ は実数なので，$6-3x^2\ge 0$ ，$x^2\le 2$ ，$x^2-2\le 0$ ，$(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})\le 0$ ，$-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$ ．変数 $t$ を $t=\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}$（$-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$）とおく．$\sin t=\sin\left(\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}\right)=\frac{x}{\sqrt{2}}$ なので $x=\sqrt{2}\sin t$ ．$-\frac{\pi}{2}\le\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}\le\frac{\pi}{2}$ つまり $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$ なので $\cos t\ge 0$ ，よって

$$\sqrt{6-3x^2}=\sqrt{6-3\left(\sqrt{2}\sin t\right)^2}=\sqrt{6-6\sin^2 t}=\sqrt{6}\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{6}\sqrt{\cos^2 t}$$
$$=\sqrt{6}\cos t\ .$$

$x=\sqrt{2}\sin t$ より $\frac{dx}{dt}=\sqrt{2}\cos t$ なので $dx=\sqrt{2}\cos t\,dt$ ．$x=0$ のとき $t=\sin^{-1}0=0$ ．$x=1$ のとき $t=\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}$ ．故に，

$$\begin{aligned}\int_0^1\sqrt{6-3x^2}\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{6}\cos t\right)\left(\sqrt{2}\cos t\right)dt=2\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t\,dt\\&=2\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)\,dt\\&=\sqrt{3}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)\\&=\frac{\sqrt{3}(\pi+2)}{4}\ .\end{aligned}$$

終

**問題 7.9.2**　定積分 $\int_{-1}^{\sqrt{3}}\sqrt{12-3x^2}\,dx$ を計算せよ．

**例題**　定積分 $\int_0^3\sqrt{16-x^2}\,dx$ を計算する．

〔解説〕　$\sqrt{16-x^2}$ は実数なので，$16-x^2\ge 0$ なので，$x^2-16\le 0$ ，$(x+4)(x-4)\le 0$ ，$-4\le x\le 4$ ．変数 $t$ を $t=\sin^{-1}\frac{x}{4}$（$-4\le x\le 4$）とおく．$\sin t=\sin\left(\sin^{-1}\frac{x}{4}\right)=\frac{x}{4}$ なので $x=4\sin t$ ．$-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$ なので $\cos t\ge 0$ ，よって

$$\sqrt{16-x^2}=\sqrt{16-\left(4\sin t\right)^2}=\sqrt{16(1-\sin^2 t)}=\sqrt{16}\sqrt{1-\sin^2 t}=4\sqrt{\cos^2 t}$$
$$=4\cos t\ .$$

$x=4\sin t$ より $\frac{dx}{dt}=4\cos t$ なので，$dx=4\cos t\,dt$ ．$x=0$ のとき $t=\sin^{-1}0=0$ ．$x=3$ のとき $t=\sin^{-1}\frac{3}{4}$ ．これらのことより，

$$\begin{aligned}\int_0^3\sqrt{16-x^2}\,dx&=\int_0^{\sin^{-1}\frac{3}{4}}(4\cos t)(4\cos t)\,dt=\int_0^{\sin^{-1}\frac{3}{4}}16\cos^2 t\,dt\\&=16\int_0^{\sin^{-1}\frac{3}{4}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=8\int_0^{\sin^{-1}\frac{3}{4}}(1+\cos 2t)\,dt\\&=8\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\sin^{-1}\frac{3}{4}}=8\left\{\sin^{-1}\frac{3}{4}+\frac{\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)}{2}-0\right\}\\&=8\sin^{-1}\frac{3}{4}+4\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\ .\end{aligned}$$

$\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)$ を計算する．公式 $\sin 2a=2\sin a\cos a$ より，

$$\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)=2\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\ .$$

まず

$$\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}\ .$$

更に，

$$\left\{\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\right\}^2=1-\left\{\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\right\}^2=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7}{16}\ ,$$

$-\frac{\pi}{2}\le\sin^{-1}\frac{3}{4}\le\frac{\pi}{2}$ なので $\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\ge 0$ ，よって

$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)=\sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}\ .$$

これらのことより

$$\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)=2\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)=2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{3}{8}\sqrt{7}\ .$$

故に

$$\begin{aligned}\int_0^3\sqrt{16-x^2}\,dx&=8\sin^{-1}\frac{3}{4}+4\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)=8\sin^{-1}\frac{3}{4}+4\cdot\frac{3}{8}\sqrt{7}\\&=\frac{3}{2}\sqrt{7}+8\sin^{-1}\frac{3}{4}\ .\end{aligned}$$

終

**問題 7.9.3**　定積分 $\int_0^4\sqrt{25-x^2}\,dx$ を計算せよ．