

第7章の補遺1 指数関数が現れる式の積分法

指数関数 e^x が現れる式を積分するには、 e^x あるいは e^x の1次式を別の変数に置換する. 定数 a, b に対して $y = ae^x + b$ とおくと、 $\frac{dy}{dx} = ae^x = y - b$ なので、

$$dx = \frac{dy}{y-b} .$$

例題 不定積分 $\int \frac{2}{3e^x + 2} dx$ を計算する.

変数 y を $y = 3e^x + 2$ とおく. $\frac{dy}{dx} = 3e^x = y - 2$ なので $dx = \frac{1}{y-2} dy$. $e^x > 0$ なので $3e^x + 2 > 0$. 積分定数を C_0, C とおく.

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{3e^x + 2} dx &= \int \frac{1}{y} \frac{2}{y-2} dy = \int \left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y} \right) dy = \ln|y-2| - \ln|y| + C_0 \\ &= \ln|3e^x + 2| - \ln|3e^x + 2| + C_0 = \ln(3e^x) - \ln(3e^x + 2) + C_0 \\ &= \ln 3 + \ln e^x - \ln(3e^x + 2) + C_0 \\ &= x - \ln(3e^x + 2) + C . \end{aligned}$$

終

問題 7.補遺1 不定積分 $\int \frac{6}{4e^x + 3e^{-x}} dx$ を計算せよ.