

第7章の補遺2 指数関数と三角関数との積の積分法

定数 a, b に対して不定積分 $\int e^{ax} \sin bx \, dx$ 及び $\int e^{ax} \cos bx \, dx$ を考える.

例解 不定積分 $\int e^{3x} \sin 4x \, dx$ と $\int e^{3x} \cos 4x \, dx$ とを計算する. $\int e^{3x} \, dx = \frac{1}{3}e^{3x}$, $\frac{d}{dx} \sin 4x = 4 \cos 4x$ なので, 部分積分法により,

$$\int e^{3x} \sin 4x \, dx = \frac{1}{3}e^{3x} \sin 4x - \frac{1}{3} \int e^{3x} 4 \cos 4x \, dx = \frac{1}{3}e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{3} \int e^{3x} \cos 4x \, dx .$$

$\int e^{3x} \, dx = \frac{1}{3}e^{3x}$, $\frac{d}{dx} \cos 4x = -4 \sin 4x$ なので, 部分積分法により,

$$\int e^{3x} \cos 4x \, dx = \frac{1}{3}e^{3x} \cos 4x - \frac{1}{3} \int e^{3x} (-4 \sin 4x) \, dx = \frac{1}{3}e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{3} \int e^{3x} \sin 4x \, dx .$$

こうして導かれた2個の等式

$$\int e^{3x} \sin 4x \, dx = \frac{1}{3}e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{3} \int e^{3x} \cos 4x \, dx ,$$

$$\int e^{3x} \cos 4x \, dx = \frac{1}{3}e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{3} \int e^{3x} \sin 4x \, dx$$

より,

$$\begin{aligned} \int e^{3x} \sin 4x \, dx &= \frac{1}{3}e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{3} \int e^{3x} \cos 4x \, dx \\ &= \frac{1}{3}e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{3} \int e^{3x} \sin 4x \, dx \right) \\ &= \frac{1}{3}e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{9}e^{3x} \cos 4x - \frac{16}{9} \int e^{3x} \sin 4x \, dx . \end{aligned}$$

この等式の両辺に $\frac{16}{9} \int e^{3x} \sin 4x \, dx$ を加える. 積分定数を A_1, B_1, C_1 とおくと,

$$\int e^{3x} \sin 4x \, dx + \frac{16}{9} \int e^{3x} \sin 4x \, dx = \frac{1}{3}e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{9}e^{3x} \cos 4x + A_1 ,$$

$$\frac{25}{9} \int e^{3x} \sin 4x \, dx = e^{3x} \left(\frac{1}{3} \sin 4x - \frac{4}{9} \cos 4x \right) + A_1 ,$$

$$25 \int e^{3x} \sin 4x \, dx = e^{3x} (3 \sin 4x - 4 \cos 4x) + B_1 ,$$

$$\int e^{3x} \sin 4x \, dx = \frac{e^{3x}}{25} (3 \sin 4x - 4 \cos 4x) + C_1 .$$

また, 先に導かれた2個の等式

$$\int e^{3x} \sin 4x \, dx = \frac{1}{3}e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{3} \int e^{3x} \cos 4x \, dx ,$$

$$\int e^{3x} \cos 4x \, dx = \frac{1}{3}e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{3} \int e^{3x} \sin 4x \, dx$$

より,

$$\begin{aligned} \int e^{3x} \cos 4x \, dx &= \frac{1}{3}e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{3} \int e^{3x} \sin 4x \, dx \\ &= \frac{1}{3}e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{3} \int e^{3x} \cos 4x \, dx \right) \\ &= \frac{1}{3}e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{9}e^{3x} \sin 4x - \frac{16}{9} \int e^{3x} \cos 4x \, dx . \end{aligned}$$

この等式の両辺に $\frac{16}{9} \int e^{3x} \cos 4x \, dx$ を加える. 積分定数を A_2, B_2, C_2 とおくと,

$$\int e^{3x} \cos 4x \, dx + \frac{16}{9} \int e^{3x} \cos 4x \, dx = \frac{1}{3}e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{9}e^{3x} \sin 4x + A_2 ,$$

$$\frac{25}{9} \int e^{3x} \cos 4x \, dx = e^{3x} \left(\frac{1}{3} \cos 4x + \frac{4}{9} \sin 4x \right) + A_2 ,$$

$$25 \int e^{3x} \cos 4x \, dx = e^{3x} (4 \sin 4x + 3 \cos 4x) + B_2 ,$$

$$\int e^{3x} \cos 4x \, dx = \frac{e^{3x}}{25} (4 \sin 4x + 3 \cos 4x) + C_2 . \quad \text{終}$$

問題7.補遺2 不定積分 $\int e^{2x} \sin 3x \, dx$ と $\int e^{2x} \cos 3x \, dx$ とを計算せよ.

このようにして次の積分公式が導かれる.

定理 定数 a, b について $a \neq 0$ または $b \neq 0$ のとき,

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C_1 \quad (C_1 \text{ は積分定数}) ,$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (b \sin bx + a \cos bx) + C_2 \quad (C_2 \text{ は積分定数}) .$$