

## § 8.1 関数のリーマン和

実数  $a, b$  について  $a \leq b$  で、関数  $f$  の定義域は区間  $[a, b]$  を含むとする。正の各自然数  $n$  に対して、

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  をとり、

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

とおく。  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$  のとき、関数  $f$  のリーマン和  $S_n$  の極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  が  $f$  及び  $a, b$  だけから唯一つに決まるならば、その極限值が関数  $f$  の定積分  $\int_a^b f(x) dx$  であった：
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n .$$

関数  $f$  が  $a$  から  $b$  まで定積分可能であるとき、定積分の定義より、 $k = 1, 2, 3, \dots, n$  に対して、 $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$  である実数  $\xi_k$  をどのように定めてもリーマン和  $S_n$  の極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  は変わらない。そこで、 $\xi_k = x_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ) とすると、リーマン和  $S_n$  は

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\} .$$

また別に、 $\xi_k = x_{k-1}$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ) とすると、リーマン和  $S_n$  は

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} .$$

この章では、関数  $f$  の定積分を計算するために、 $f$  のリーマン和として

$\sum_{k=1}^n \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\}$  或いは  $\sum_{k=1}^n \{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$  を用いる。