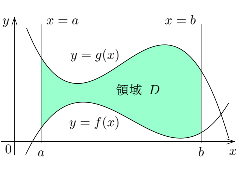
§8.2　平面図形の面積

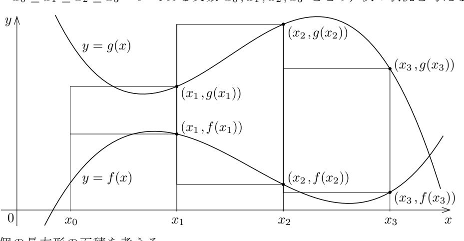
実数 a と b とについて $a \leq b$ とする．また，関数 f と g とは a から b まで積分可能であり，区間 $[a,b]$ の各実数 x について $f(x) \leq g(x)$ とする．xy 座標平面において，連立不等式

$$a \leq x \leq b \text{ かつ } f(x) \leq y \leq g(x)$$

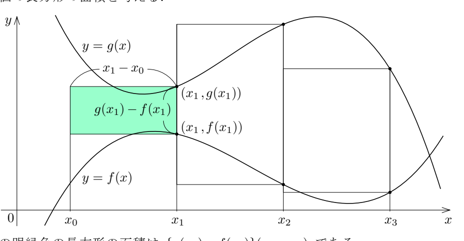
で表される領域 D の面積を考える．



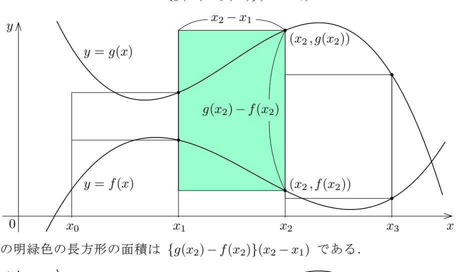
$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 = b$ である実数 x_0, x_1, x_2, x_3 をとり，次の状況を考える．



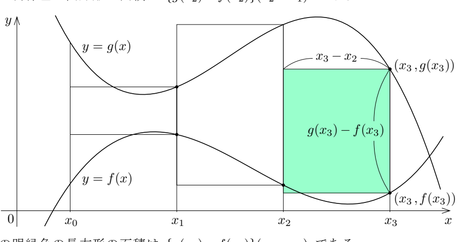
3 個の長方形の面積を考える．



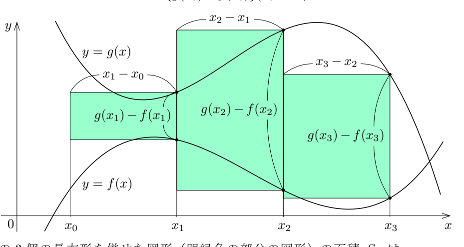
上図の明緑色の長方形の面積は $\{g(x_1)-f(x_1)\}(x_1-x_0)$ である．



上図の明緑色の長方形の面積は $\{g(x_2)-f(x_2)\}(x_2-x_1)$ である．



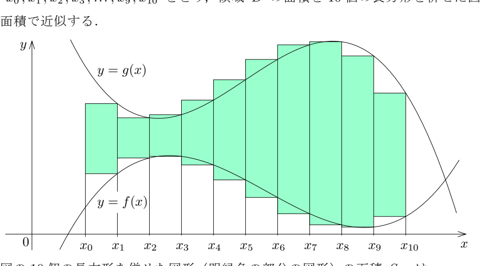
上図の明緑色の長方形の面積は $\{g(x_3)-f(x_3)\}(x_3-x_2)$ である．



上図の 3 個の長方形を併せた図形（明緑色の部分の図形）の面積 S_3 は

$$S_3 = \{g(x_1)-f(x_1)\}(x_1-x_0) + \{g(x_2)-f(x_2)\}(x_2-x_1) + \{g(x_3)-f(x_3)\}(x_3-x_2)$$
$$= \sum_{k=1}^{3} \left[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})\right] .$$

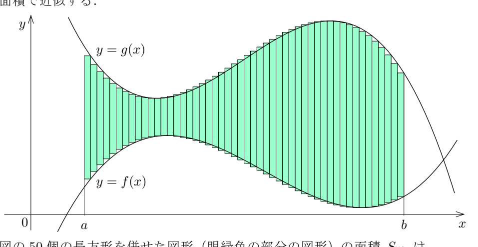
長方形の個数を 10 にする．$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_9 \leq x_{10} = b$ である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_9, x_{10}$ をとり，領域 D の面積を 10 個の長方形を併せた図形の面積で近似する．



上図の 10 個の長方形を併せた図形（明緑色の部分の図形）の面積 S_{10} は

$$S_{10} = \sum_{k=1}^{10} \left[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})\right] .$$

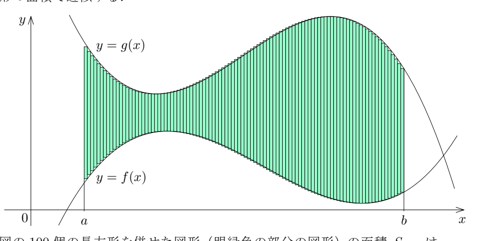
長方形の個数を 50 にする．$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{49} \leq x_{50} = b$ である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{49}, x_{50}$ をとり，領域 D の面積を 50 個の長方形を併せた図形の面積で近似する．



上図の 50 個の長方形を併せた図形（明緑色の部分の図形）の面積 S_{50} は

$$S_{50} = \sum_{k=1}^{50} \left[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})\right] .$$

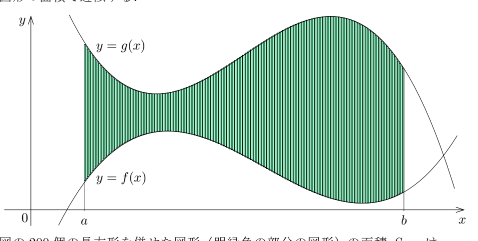
長方形の個数を 100 にする．$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{99} \leq x_{100} = b$ である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{99}, x_{100}$ をとり，領域 D の面積を 100 個の長方形を併せた図形の面積で近似する．



上図の 100 個の長方形を併せた図形（明緑色の部分の図形）の面積 S_{100} は

$$S_{100} = \sum_{k=1}^{100} \left[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})\right] .$$

長方形の個数を 200 にする．$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{199} \leq x_{200} = b$ である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{199}, x_{200}$ をとり，領域 D の面積を 200 個の長方形を併せた図形の面積で近似する．



上図の 200 個の長方形を併せた図形（明緑色の部分の図形）の面積 S_{200} は

$$S_{200} = \sum_{k=1}^{200} \left[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})\right] .$$

正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ をとる．これまで述べてきたような n 個の長方形を併せた図形の面積 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})\right] .$$

$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$ について，$n \to \infty$ のとき $\delta_n \to 0$ とする．n 個の長方形を併せた図形の面積 S_n は $n \to \infty$ のとき領域 D の面積に限りなく近づく；よって領域 D の面積は S_n の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ である．ここで $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})\right]$ は関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和である．a から b まで，関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが積分可能なので，関数 $g(x)-f(x)$ も積分可能である（定理6.9.1）．よって，関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 S_n は $n \to \infty$ のとき定積分 $\int_a^b \{g(x)-f(x)\}\,dx$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b \{g(x)-f(x)\}\,dx .$$

故に，領域 D の面積は定積分 $\int_a^b \{g(x)-f(x)\}\,dx$ である．

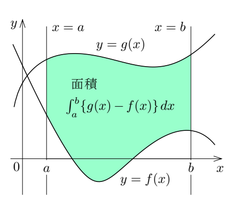
このようにして次の定理が成り立つ．

定理 8.2　実数 a と b とについて $a \leq b$ とする．また，関数 f と g とは a から b まで積分可能であり，区間 $[a,b]$ の各実数 x について $f(x) \leq g(x)$ とする．xy 座標平面において連立不等式

$$a \leq x \leq b \text{ かつ } f(x) \leq y \leq g(x)$$

で表される領域の面積は

$$\int_a^b \{g(x)-f(x)\}\,dx .$$

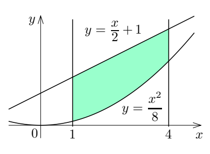


ここで述べたような，領域を長方形を併せた図形で近似して，併せる長方形を限りなく増やして長方形を限りなく細くして近似の精度を上げていくときの極限値として元の図形の面積を求める方法を区分求積法という．

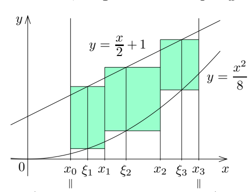
$\boxed{\text{問題 8.2.1}}$　xy 座標平面において連立不等式

$$1 \leq x \leq 4 \text{ かつ } \frac{x^2}{8} \leq y \leq \frac{x}{2}+1$$

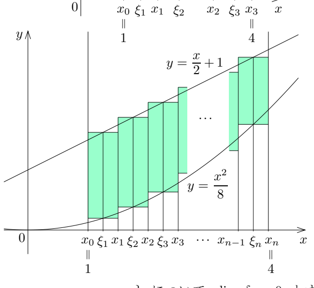
で表される領域 D の面積を求めよ．



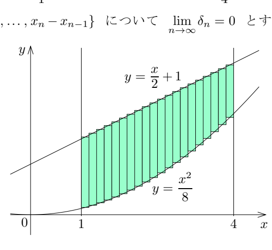
(1)　$1 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 = 4$ である実数 x_0, x_1, x_2, x_3 及び $x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3$ である実数 ξ_1, ξ_2, ξ_3 に対して，右図の明緑色の 3 個の長方形を併せた領域の面積 S_3 を表す式を記せ．



(2)　変数 n を正の自然数とする．$1 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 4$ である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ に対して，右図のような明緑色の n 個の長方形を併せた領域の面積 S_n を表す式を記せ．またこの式を何というか記せ．



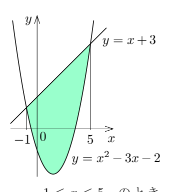
(3)　$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$ について $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ とする；つまり $n \to \infty$ のとき $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ の間隔は総て 0 に限りなく近付くとする．$n \to \infty$ のとき S_n は右図のように領域 D の面積に限りなく近づく；つまり S_n の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が領域 D の面積になる．このことを用いて，定積分によって領域 D の面積を求めよ．



$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において関数 $y = x^2 - 3x - 2$ のグラフと $y = x + 3$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求める．

〔解説〕 まず，$y = x^2 - 3x - 2$ のグラフと $y = x + 3$ のグラフとの共有点の x 座標を求める．$x^2 - 3x - 2 = x + 3$ とすると，

$$x^2 - 4x - 5 = 0 ,$$
$$(x+1)(x-5) = 0 ,$$
$$x = -1, 5 .$$



$y = x^2 - 3x - 2$ のグラフと $y = x + 3$ のグラフとの共有点の x 座標は -1 と 5 の 2 個である．$-1 \leq x \leq 5$ のとき $x^2 - 3x - 2 \leq x + 3$．従って，$y = x^2 - 3x - 2$ のグラフと $y = x + 3$ のグラフとで囲まれる領域の面積は

$$\int_{-1}^{5} \{(x+3) - (x^2 - 3x - 2)\}\,dx = \int_{-1}^{5} (-x^2 + 4x + 5)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x\right]_{-1}^{5}$$
$$= -\frac{125}{3} + 50 + 25 - \left(\frac{1}{3} + 2 - 5\right)$$
$$= 36 .$$

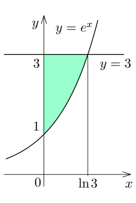
終

$\boxed{\text{問題 8.2.2}}$　xy 座標平面において関数 $y = 9 - x^2$ のグラフと $y = 1 - 2x$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求めよ．

$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において指数関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = 3$ と y 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める．

〔解説〕 まず関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = 3$ との共有点の x 座標を求める．$y = e^x$ かつ $y = 3$ とすると，$e^x = 3$ なので $x = \ln 3$．関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = 3$ との共有点の x 座標は $\ln 3$ である．D の点の x 座標の範囲は $0 \leq x \leq \ln 3$ であり，このとき $e^x \leq e^{\ln 3} = 3$．領域 D の面積は

$$\int_0^{\ln 3} (3 - e^x)\,dx = \left[3x - e^x\right]_0^{\ln 3} = 3\ln 3 - e^{\ln 3} - (-1)$$
$$= 3\ln 3 - 2 .$$

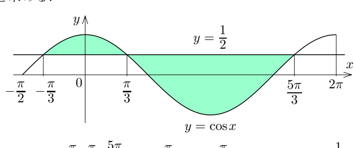


終

$\boxed{\text{問題 8.2.3}}$　xy 座標平面において対数関数 $y = \ln x$ のグラフと直線 $x = 9$ と直線 $y = 2$ とで囲まれる領域 D の面積を求めよ．

$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において関数 $y = \cos x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi\right)$ のグラフと直線 $y = \frac{1}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求める．

〔解説〕 まず関数 $y = \cos x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi\right)$ のグラフと直線 $y = \frac{1}{2}$ との共有点の x 座標を求める．$\cos x = \frac{1}{2}$ かつ $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ とすると，$x = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$．$-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ のとき $\cos x \geq \frac{1}{2}$，$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$ のとき $\cos x \leq \frac{1}{2}$．面積は



$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} - \cos x\right)dx$$
$$= \left[\sin x - \frac{x}{2}\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} + \left[\frac{x}{2} - \sin x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3} .$$

終

$\boxed{\text{問題 8.2.4}}$　xy 座標平面において関数 $y = \sin x$ $\left(0 \leq x \leq \frac{5\pi}{2}\right)$ のグラフと直線 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求めよ．

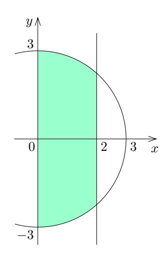
$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 2$ と $x^2 + y^2 \leq 9$ との連立で表される領域 D の面積を求める．

〔解説〕 不等式 $x^2 + y^2 \leq 9$ より，$y^2 \leq 9 - x^2$ なので，

$$-\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq \sqrt{9 - x^2} .$$

従って，不等式 $x^2 + y^2 \leq 9$ と $0 \leq x \leq 2$ との連立で表される領域 D の面積は

$$\int_0^2 \left\{\sqrt{9 - x^2} - \left(-\sqrt{9 - x^2}\right)\right\}dx = \int_0^2 2\sqrt{9 - x^2}\,dx$$
$$= 2\int_0^2 \sqrt{9 - x^2}\,dx .$$



$9 - x^2 \geq 0$ なので $-3 \leq x \leq 3$．変数 y を $y = \sin^{-1}\frac{x}{3}$ とおく．$\sin y = \frac{x}{3}$ なので $x = 3\sin y$．$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\frac{x}{3} \leq \frac{\pi}{2}$ つまり $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ なので $\cos y \geq 0$，よって

$$\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - (3\sin y)^2} = \sqrt{9(1 - \sin^2 y)} = 3\sqrt{\cos^2 y} = 3\cos y .$$

$x = 3\sin y$ より $\frac{dx}{dy} = 3\cos y$ なので $dx = 3\cos y\,dy$．$x = 0$ のとき $y = 0$．$x = 2$ のとき $y = \sin^{-1}\frac{2}{3}$．これらのことより，

$$2\int_0^2 \sqrt{9 - x^2}\,dx = 2\int_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} (3\cos y)(3\cos y)\,dy = 9\int_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} 2\cos^2 y\,dy$$
$$= 9\int_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} (1 + \cos 2y)\,dy = 9\left[y + \frac{\sin 2y}{2}\right]_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}}$$
$$= 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + \frac{9}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) .$$

$\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)$ を計算する．公式 $\sin 2a = 2\sin a\cos a$ により

$$\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 2\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) .$$

まず

$$\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} .$$

更に，

$$\left\{\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\right\}^2 = 1 - \left\{\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\right\}^2 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} ,$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\frac{2}{3} \leq \frac{\pi}{2}$ なので $\cos\sin^{-1}\frac{2}{3} \geq 0$，よって

$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} .$$

これらのことより

$$\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 2\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4}{9}\sqrt{5} .$$

故に

$$9\sin^{-1}\frac{2}{3} + \frac{9}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + \frac{9}{2} \cdot \frac{4}{9}\sqrt{5} = 2\sqrt{5} + 9\sin^{-1}\frac{2}{3} .$$

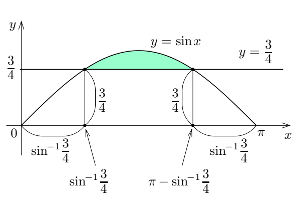
領域 D の面積は $2\sqrt{5} + 9\sin^{-1}\frac{2}{3}$ である．

終

$\boxed{\text{問題 8.2.5}}$　xy 座標平面において不等式 $x^2 + y^2 \leq 25$ と $x \geq 3$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ．

$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\frac{3}{4} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求める．

〔解説〕 領域 D の点の x 座標の範囲を求める．xy 座標平面において $y = \sin x$ のグラフと直線 $y = \frac{3}{4}$ との共有点を考える．$0 \leq x \leq \pi$ の範囲で方程式 $\sin x = \frac{3}{4}$ の解は $\sin^{-1}\frac{3}{4}$ と $\pi - \sin^{-1}\frac{3}{4}$ である．領域 D の点の x 座標の範囲は $\sin^{-1}\frac{3}{4} \leq x \leq \pi - \sin^{-1}\frac{3}{4}$；この範囲で $\sin x \geq \frac{3}{4}$．領域 D の面積は



$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi - \sin^{-1}\frac{3}{4}} \left(\sin x - \frac{3}{4}\right)dx = \left[-\cos x - \frac{3}{4}x\right]_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi - \sin^{-1}\frac{3}{4}}$$
$$= -\cos\left(\pi - \sin^{-1}\frac{3}{4}\right) - \frac{3}{4}\left(\pi - \sin^{-1}\frac{3}{4}\right) + \cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4}\sin^{-1}\frac{3}{4}$$
$$= \cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) - \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{4}\sin^{-1}\frac{3}{4} + \cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4}\sin^{-1}\frac{3}{4}$$
$$= 2\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4} - \frac{3\pi}{4} .$$

$\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)$ を計算する．$\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$ なので，

$$\left\{\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\right\}^2 = 1 - \left\{\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\right\}^2 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} .$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\frac{3}{4} \leq \frac{\pi}{2}$ なので $\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \geq 0$，よって

$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4} .$$

故に

$$2\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4} - \frac{3\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4} - \frac{3\pi}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4} - \frac{3\pi}{4} .$$

領域 D の面積は $\frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4} - \frac{3\pi}{4}$ である．

終

$\boxed{\text{問題 8.2.6}}$　xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\frac{2}{3} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ．