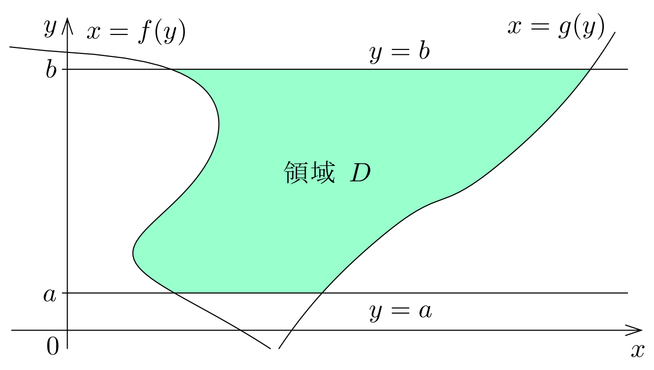
§ 8.3　平面図形の面積

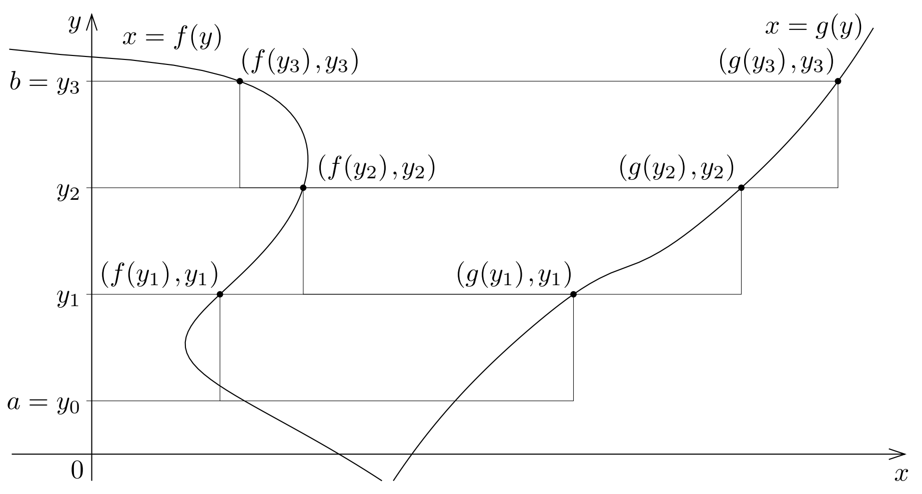
実数 a と b とについて $a \leq b$ とする． また，関数 f と g とは a から b まで積分可能であり，区間 $[a,b]$ の各実数 y について $f(y) \leq g(y)$ とする． xy 座標平面において，連立不等式



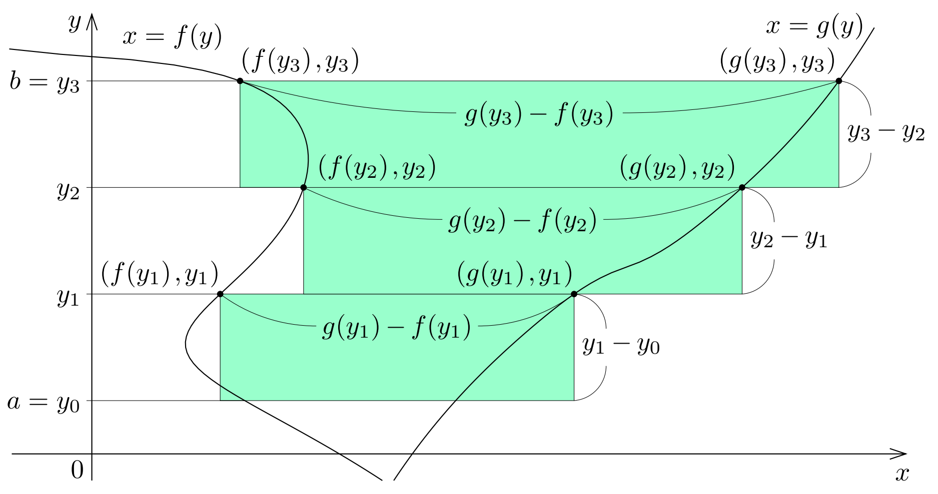
$$a \leq y \leq b \ \text{かつ}\ f(y) \leq x \leq g(y)$$

で表される領域を D の面積を考える．

$a = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 = b$ である実数 y_0, y_1, y_2, y_3 をとり，下図の状況を考える．



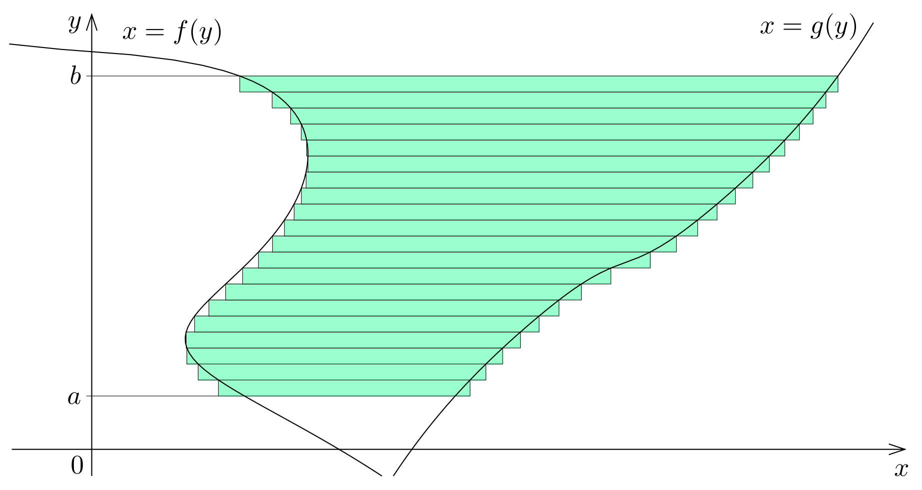
下図の 3 個の長方形を併せた図形（明緑色の部分の図形）を考える．



上図の 3 個の長方形を併せた図形（明緑色の部分の図形）の面積 S_3 は

$$\begin{aligned} S_3 &= \{g(y_1) - f(y_1)\}(y_1 - y_0) + \{g(y_2) - f(y_2)\}(y_2 - y_1) + \{g(y_3) - f(y_3)\}(y_3 - y_2) \\ &= \sum_{k=1}^{3} \left[\{g(y_k) - f(y_k)\}(y_k - y_{k-1})\right] . \end{aligned}$$

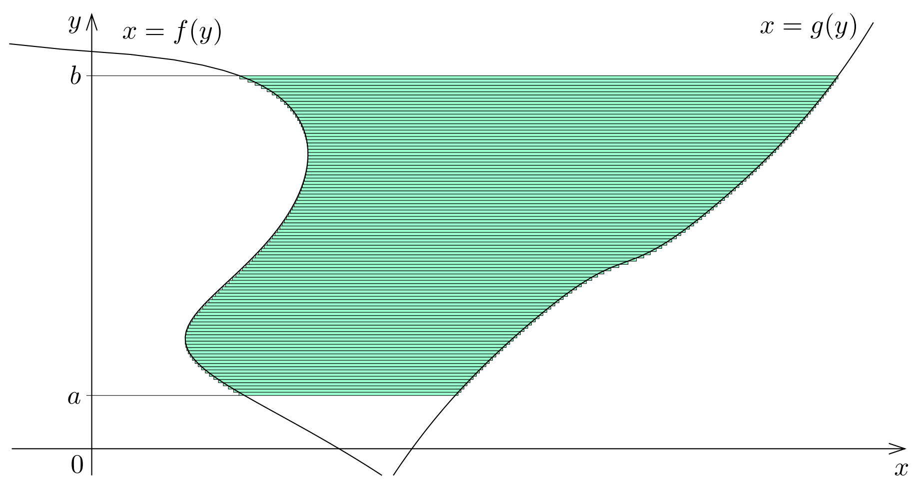
長方形の個数を 20 にする． $a = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \cdots \leq y_{19} \leq y_{20} = b$ である実数 $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{19}, y_{20}$ をとり，領域 D の面積を 20 個の長方形を併せた図形（明緑色の部分の図形）の面積で近似する．



上図の 20 個の長方形を併せた図形（明緑色の部分の図形）の面積 S_{20} は

$$S_{20} = \sum_{k=1}^{20} \left[\{g(y_k) - f(y_k)\}(y_k - y_{k-1})\right] .$$

長方形の個数を 100 にする． $a = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \cdots \leq y_{99} \leq y_{100} = b$ である実数 $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{99}, y_{100}$ をとり，領域 D の面積を 100 個の長方形を併せた図形（明緑色の部分の図形）の面積で近似する．



上図の 100 個の長方形を併せた図形（明緑色の部分の図形）の面積 S_{100} は

$$S_{100} = \sum_{k=1}^{100} \left[\{g(y_k) - f(y_k)\}(y_k - y_{k-1})\right] .$$

正の各自然数 n に対して，

$$a = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \cdots \leq y_{n-1} \leq y_n = b$$

である実数 $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}, y_n$ をとる． これまで述べてきたような n 個の長方形を併せた図形の面積 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\{g(y_k) - f(y_k)\}(y_k - y_{k-1})\right] .$$

$\delta_n = \max\{y_1 - y_0, y_2 - y_1, y_3 - y_2, \ldots, y_n - y_{n-1}\}$ について， $n \to \infty$ のとき $\delta_n \to 0$ とする． n 個の長方形を併せた図形の面積 S_n は $n \to \infty$ のとき領域 D の面積に限りなく近づく； よって領域 D の面積は S_n の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ である． ここで $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\{g(y_k) - f(y_k)\}(y_k - y_{k-1})\right]$ は関数 $g(y) - f(y)$ のリーマン和である． a から b まで，関数 $f(y)$ と $g(y)$ とが積分可能なので，関数 $g(y) - f(y)$ も積分可能である（定理 6.9.1）． よって，関数 $g(y) - f(y)$ のリーマン和 S_n は $n \to \infty$ のとき定積分 $\int_a^b \{g(y) - f(y)\}\,dy$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b \{g(y) - f(y)\}\,dy .$$

故に，領域 D の面積は定積分 $\int_a^b \{g(y) - f(y)\}\,dy$ である．

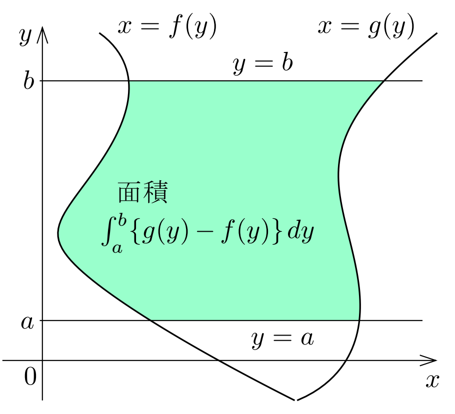
このようにして次の定理が導かれる．

定理 8.3　実数 a と b とについて $a \leq b$ とする． また，関数 f と g とは a から b まで積分可能であり，区間 $[a,b]$ の各実数 y について $f(y) \leq g(y)$ とする． xy 座標平面において連立不等式

$$a \leq y \leq b \ \text{かつ}\ f(y) \leq x \leq g(y)$$

で表される領域の面積は

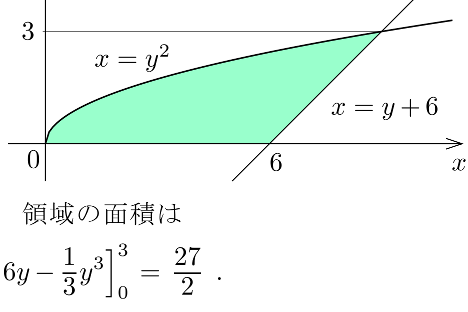
$$\int_a^b \{g(y) - f(y)\}\,dy .$$



例題　xy 座標平面において関数 $y = \sqrt{x}$ のグラフと関数 $y = x - 6$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域の面積を求める．

〔解説〕 $x \geq 0$ のとき，

$$y = \sqrt{x} \iff x = y^2 \ \text{かつ}\ y \geq 0 \quad ,$$
$$y = x - 6 \iff x = y + 6 \quad .$$



$x = y^2$ かつ $y \geq 0$ かつ $x = y + 6$ とすると， $y^2 = y + 6$ ， $y = 3, -2$ ； $y \geq 0$ なので $y = 3$ ． $0 \leq y \leq 3$ のとき $y + 6 \geq y^2$ ． 領域の面積は

$$\int_0^3 (y + 6 - y^2)\,dy = \left[\frac{1}{2}y^2 + 6y - \frac{1}{3}y^3\right]_0^3 = \frac{27}{2} .$$

この面積を x について積分して求める計算は次のようになる．

$$\int_0^6 \sqrt{x}\,dx + \int_6^9 \{\sqrt{x} - (x - 6)\}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^6 + \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2 + 6x\right]_6^9 = \frac{27}{2} .$$

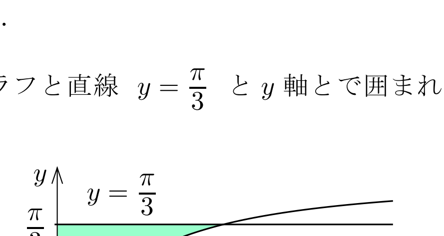
終

問題 8.3.1　xy 座標平面において関数 $y = -\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y = \frac{x}{2} - 4$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域の面積を求めよ．

例題　xy 座標平面において関数 $y = \ln x$ （ $x > 0$ ）のグラフと直線 $y = 1$ と直線 $y = 2$ と y 軸とで囲まれる領域の面積を求める．

〔解説〕 $x > 0$ のとき，

$$y = \ln x \iff x = e^y \quad .$$



領域の点の y 座標の範囲は $1 \leq y \leq 2$ ． 各実数 x について $e^x > 0$ ． 領域の面積は

$$\int_1^2 e^y\,dy = \left[e^y\right]_1^2 = e^2 - e .$$

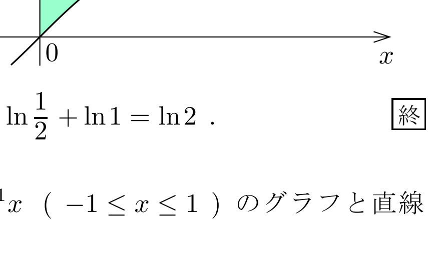
終

問題 8.3.2　xy 座標平面において関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = e$ と直線 $y = e^2$ と y 軸とで囲まれる領域の面積を求めよ．

例題　xy 座標平面において $y = \tan^{-1} x$ のグラフと直線 $y = \frac{\pi}{3}$ と y 軸とで囲まれる領域の面積を求める．

〔解説〕 $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ のとき，

$$y = \tan^{-1} x \iff x = \tan y .$$



領域の点の y 座標の範囲は $0 \leq y \leq \frac{\pi}{3}$ ．
このとき $\tan y \geq 0$ ． 領域の面積は

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan y\,dy = \left[-\ln|\cos y|\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\ln\frac{1}{2} + \ln 1 = \ln 2 .$$

終

問題 8.3.3　xy 座標平面において関数 $y = \sin^{-1} x$ （ $-1 \leq x \leq 1$ ）のグラフと直線 $y = \frac{1}{2}$ と y 軸とで囲まれる領域の面積を求めよ．