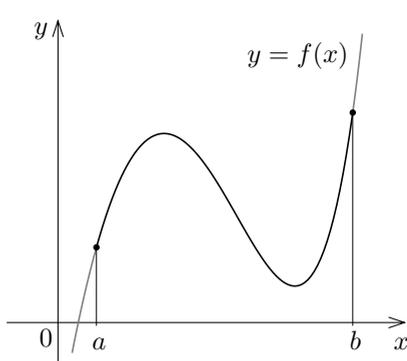


§8.5 関数のグラフの長さ

関数のグラフの長さを定積分の式で表す。

定理8.5 実数 a と b について $a \leq b$ で、関数 f の導関数 f' は区間 $[a, b]$ において連続であるとする。 xy 座標平面において不等式 $a \leq x \leq b$ と方程式 $y = f(x)$ との連立で表される曲線の長さは $\int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$ である。



定理8.5を説明する。5.2節で述べた平均値の定理を用いる。実数 p と q について $p < q$ で、関数 f が区間 $[p, q]$ において微分可能であるならば、次のような実数 r がある：

$$f(q) - f(p) = f'(r)(q - p) \quad \text{かつ} \quad p < r < q.$$

実数 a と b について $a \leq b$ で、関数 f の導関数 f' は区間 $[a, b]$ において連続であるとする。

正の各自然数 n に対して、

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ をとる。

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}.$$

について、 $n \rightarrow \infty$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ とする。

$y = f(x)$ のグラフの点 $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}, P_n$ を次のように定める：

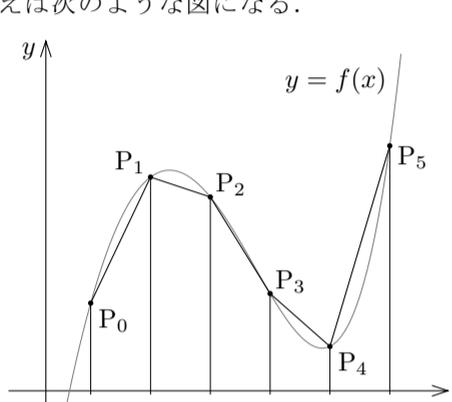
$$P_0 = (x_0, f(x_0)), \quad P_1 = (x_1, f(x_1)), \quad P_2 = (x_2, f(x_2)), \quad P_3 = (x_3, f(x_3)), \quad \dots,$$

$$P_{n-1} = (x_{n-1}, f(x_{n-1})), \quad P_n = (x_n, f(x_n)).$$

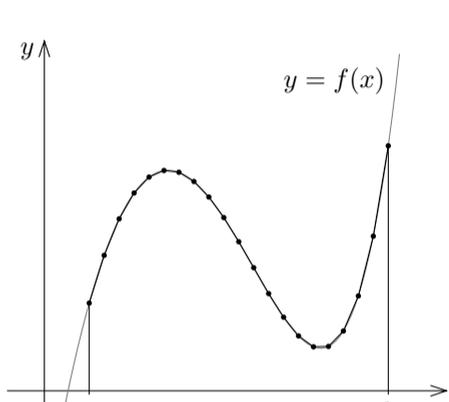
点 $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}, P_n$ を順に結ぶ折れ線の長さを L_n とおく：

$$L_n = \overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \cdots + \overline{P_{n-1}P_n} = \sum_{k=1}^n \overline{P_{k-1}P_k}.$$

例えば次のような図になる。



$n = 5$ のときの折れ線



$n = 20$ のときの折れ線

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して、

$$P_{k-1} = (x_{k-1}, f(x_{k-1})), \quad P_k = (x_k, f(x_k)),$$

よって、線分 $P_{k-1}P_k$ の長さ $\overline{P_{k-1}P_k}$ は

$$\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}^2}.$$

$x_{k-1} < x_k$ で、 f は区間 $[x_{k-1}, x_k]$ で微分可能なので、平均値の定理より次のような実数 ξ_k がある：

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}), \quad x_{k-1} < \xi_k < x_k.$$

このことから、

$$\begin{aligned} \overline{P_{k-1}P_k} &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}^2} \\ &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}^2} \\ &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f'(\xi_k)\}^2(x_k - x_{k-1})^2} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 \{1 + \{f'(\xi_k)\}^2\}} \\ &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2} \sqrt{1 + \{f'(\xi_k)\}^2}, \end{aligned}$$

$x_{k-1} \leq x_k$ より $x_k - x_{k-1} \geq 0$ なので $\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2} = x_k - x_{k-1}$ 、よって

$$\overline{P_{k-1}P_k} = (x_k - x_{k-1}) \sqrt{1 + \{f'(\xi_k)\}^2}.$$

従って、折れ線の長さ L_n は

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{k=1}^n \overline{P_{k-1}P_k} = \sum_{k=1}^n \{(x_k - x_{k-1}) \sqrt{1 + \{f'(\xi_k)\}^2}\} \\ &= \sum_{k=1}^n \{\sqrt{1 + \{f'(\xi_k)\}^2} (x_k - x_{k-1})\}. \end{aligned}$$

仮に関数 F を $F(x) = \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}$ と定める。このとき、

$$L_n = \sum_{k=1}^n \{F(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}.$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して $x_{k-1} < \xi_k < x_k$ なので、この等式の右辺は関数 F のリーマン和である。

折れ線の長さ L_n の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n$ があるならば、それが方程式 $y = f(x)$ と不等式 $a \leq x \leq b$ とで表される曲線の長さになる。関数 f の導関数 $f'(x)$ は連続なので、関数 $F(x) = \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}$ も連続である。従って関数 F は a から b まで積分可能である。 L_n は関数 F のリーマン和なので、 L_n の極限值は F の定積分である：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx.$$

故に、方程式 $y = f(x)$ と不等式 $a \leq x \leq b$ とで表される曲線の長さは

$$\int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx \text{ である。}$$

こうして定理8.5が説明された。

例題 xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 1$ と方程式 $y = 2\sqrt{x^3}$ との連立で表される曲線 C の長さを求める。

$0 \leq x \leq 1$ の範囲で、変数 x の関数 $y = 2\sqrt{x^3}$ について、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2\sqrt{x^3}) = 2 \frac{d}{dx} x^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x},$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + (3\sqrt{x})^2 = 1 + 9x,$$

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 9x} dx.$$

$t = 1 + 9x$ とおく。 $\frac{dt}{dx} = 9$ より $dx = \frac{1}{9} dt$ 。 $x = 0$ のとき $t = 1$ 、 $x = 1$ のとき $t = 10$ 。

$$\int_0^1 \sqrt{1 + 9x} dx = \int_1^{10} \sqrt{t} \frac{1}{9} dt = \frac{1}{9} \int_1^{10} t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{9} \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_1^{10} = \frac{2}{27} (\sqrt{10^3} - \sqrt{1^3})$$

$$= \frac{2}{27} (10\sqrt{10} - 1).$$

曲線 C の長さは $\frac{2}{27} (10\sqrt{10} - 1)$ である。 終

問題 8.5.1 xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 8$ と方程式 $y = \frac{\sqrt{x^3}}{3}$ との連立で表される曲線 C の長さを求めよ。

例題 xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 3$ と方程式 $y = \sqrt{12 - x^2}$ との連立で表される曲線 C の長さを求める。

$0 \leq x \leq 3$ の範囲で、変数 x の関数 $y = \sqrt{12 - x^2}$ について、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sqrt{12 - x^2} = \frac{d}{dx} (12 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (12 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{12 - x^2}},$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{12 - x^2}}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{12 - x^2} = \frac{12 - x^2 + x^2}{12 - x^2} = \frac{12}{12 - x^2},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{12 - x^2}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12 - x^2}},$$

$$\int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^3 \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12 - x^2}} dx = \sqrt{12} \left[\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{12}} \right]_0^3$$

$$= \sqrt{12} \left(\sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin^{-1} 0 \right) = \sqrt{12} \cdot \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{12} \pi}{3}.$$

曲線 C の長さは $\frac{\sqrt{12} \pi}{3}$ である。 終

問題 8.5.2 xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 3$ と方程式 $y = \sqrt{36 - x^2}$ とで表される曲線 C の長さを求めよ。