第8章の補遺2　座標空間における立体領域の体積

3次元座標空間における立体領域の体積を求めるために定理8.4を特殊化する．

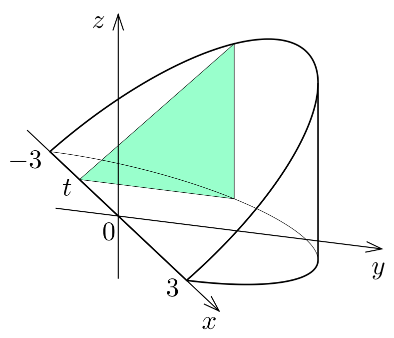
定理　xyz 座標空間において，立体領域 V に属す点の x 座標のうち，最小値を a と，最大値を b とおく．区間 $[a,b]$ の各実数 t に対して，x 軸に垂直な平面 $x=t$ と領域 V との共通部分になる平面領域の面積を $S(t)$ とおく；この関数 S は a から b まで積分可能であるとする．このとき，立体領域 V の体積は $\int_a^b S(t)\,dt$ である．

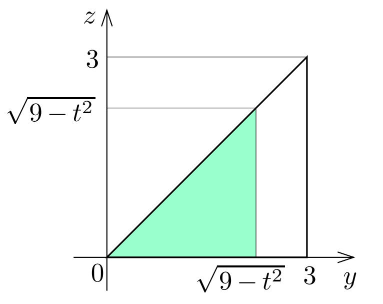
この定理では xyz 座標空間における立体と x 軸に垂直な平面との共通部分を考えたが，y 軸に垂直な平面との共通部分を考えることもできる．

定理　xyz 座標空間において，立体領域 V に属す点の y 座標のうち，最小値を a と，最大値を b とおく．区間 $[a,b]$ の各実数 t に対して，x 軸に垂直な平面 $y=t$ と領域 V との共通部分になる平面領域の面積を $S(t)$ とおく；この関数 S は a から b まで積分可能であるとする．このとき，立体領域 V の体積は $\int_a^b S(t)\,dt$ である．

$\boxed{\text{例題}}$　xyz 座標空間において不等式　$x^2+y^2\leq 9$　で表される円柱体と不等式 $0\leq z\leq y$　とで表される領域の共通部分 V の体積を求める．

〔解説〕　V の各点 (x,y,z) について，$x^2+y^2\leq 9$ なので，$x^2\leq 9-y^2\leq 9$，よって $-3\leq x\leq 3$．区間 $[-3,3]$ の各実数 t に対して平面 $x=t$ と立体領域 V との共通部分を考える．不等式 $x^2+y^2\leq 9$ と方程式 $x=t$ とより，$t^2+y^2\leq 9$，$y^2\leq 9-t^2$，$y\geq 0$ なので $0\leq y\leq\sqrt{9-t^2}$．更に不等式 $0\leq z\leq y$ より $0\leq z\leq y\leq\sqrt{9-t^2}$；この不等式は，$yz$ 座標平面において2辺の長さが $\sqrt{9-t^2}$ である直角二等辺三角形で囲まれる領域を表す；その面積 $S(t)$ は





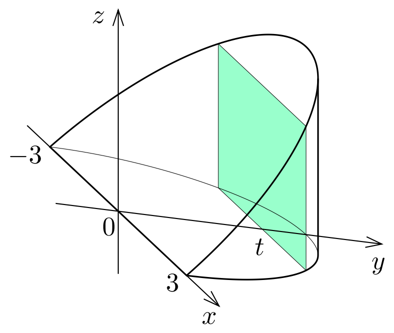
$$S(t)=\frac{1}{2}\sqrt{9-t^2}\sqrt{9-t^2}=\frac{9-t^2}{2}.$$

立体領域 V の体積は，

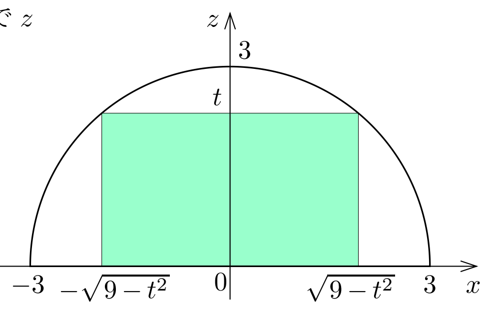
$$\int_{-3}^{3}S(t)\,dt=\int_{-3}^{3}\frac{9-t^2}{2}\,dt=\left[\frac{9}{2}t-\frac{1}{6}t^3\right]_{-3}^{3}=27-9=18.$$

y 軸に垂直な平面と V との共通部分を考えてもよい．

V の各点 (x,y,z) について，$x^2+y^2\leq 9$ なので，$y^2\leq 9-x^2\leq 9$，$-3\leq y\leq 3$，更に $y\geq 0$ なので $0\leq y\leq 3$．区間 $[0,3]$ の各実数 t に対して平面 $y=t$ と立体領域 V との共通部分を考える．不等式 $x^2+y^2\leq 9$ と方程式 $y=t$ とより，$x^2+t^2\leq 9$，$x^2\leq 9-t^2$，$-\sqrt{9-t^2}\leq x\leq\sqrt{9-t^2}$．また，不等式 $0\leq z\leq y$ と方程式 $y=t$ とより $0\leq z\leq t$．これらの不等式は，yz 座標平面において x 軸方向の辺の長さが $2\sqrt{9-x^2}$ で z 軸方向の辺の長さが t である長方形で囲まれる領域を表す；その面積 $S(t)$ は



$$S(t)=2\sqrt{9-t^2}\,t=2t\sqrt{9-t^2}.$$



立体領域 V の体積は

$$\int_0^3 S(t)\,dt=\int_0^3 2t\sqrt{9-t^2}\,dt.$$

変数 u を $u=9-t^2$ とおく．$\dfrac{du}{dt}=-2t$ なので $2t\,dt=-du$．$t=0$ のとき $u=9$．$t=3$ のとき $u=0$．よって，

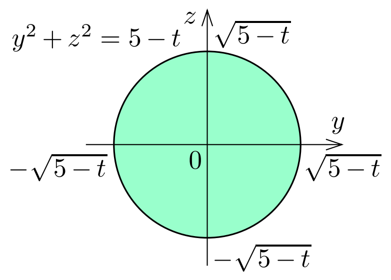
$$\int_0^3 2t\sqrt{9-t^2}\,dt=\int_9^0 u^{\frac{1}{2}}(-du)=-\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_9^0=18.$$

故に立体領域 V の体積は 18 である．$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 8.補遺2.1}}$　xyz 座標空間において不等式 $x^2+y^2\leq 3$ で表される円柱体と不等式 $0\leq z\leq x$ とで表される領域の共通部分 V の体積を求めなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　xyz 座標空間において，不等式 $x\geq 0$ と $x+y^2+z^2\leq 5$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める．

V の各点 (x,y,z) について，$x\geq 0$ かつ $x+y^2+z^2\leq 5$ なので，$0\leq x\leq 5-y^2-z^2\leq 5$．区間 $[0,5]$ の各実数 t に対して平面 $x=t$ と立体領域 V との共通部分を考える．不等式 $x+y^2+z^2\leq 5$ と方程式 $x=t$ とより，$t+y^2+z^2\leq 5$，$y^2+z^2\leq 5-t$；この不等式は yz 座標平面において半径が $\sqrt{5-t}$ の円で囲まれる領域を表す；その面積 $S(t)$ は



$$S(t)=\pi\sqrt{5-t^2}=\pi(5-t).$$

立体領域 V の体積は

$$\int_0^5 S(t)\,dt=\int_0^5\pi(5-t)\,dt=\pi\left[5t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^5=\pi\left(25-\frac{25}{2}\right)=\frac{25\pi}{2}.$$

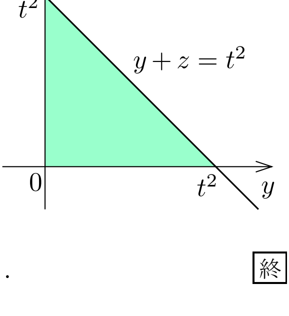
$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 8.補遺2.2}}$　xyz 座標空間において不等式 $0\leq y\leq 6-x^2-z^2$ で表される立体領域 V の体積を求めなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　xyz 座標空間において，不等式 $0\leq x\leq 3$ と $y\geq 0$ と $z\geq 0$ と $y+z\leq x^2$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める．

V の各点 (x,y,z) について $0\leq x\leq 3$．区間 $[0,3]$ の各実数 t に対して平面 $x=t$ と立体領域 V との共通部分を考える．不等式 $y+z\leq x^2$ と方程式 $x=t$ とより，$y+z\leq t^2$．yz 座標平面において，不等式 $y\geq 0$ と $z\geq 0$ と $y+z\leq t^2$ との連立で表される図形は，2辺の長さが t^2 である直角二等辺三角形で囲まれる領域である．その面積 $S(t)$ は

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot t^2\cdot t^2=\frac{t^4}{2}.$$



立体領域 V の体積は

$$\int_0^3 S(t)\,dt=\int_0^3\frac{t^4}{2}\,dt=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}t^5\right]_0^3=\frac{243}{10}.$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 8.補遺2.3}}$　xyz 座標空間において，不等式 $x\geq 0$ と $y\geq 0$ と $0\leq z\leq 3$ と $x+y\leq e^z$ との連立で表される立体領域 V の体積を求めなさい．e は自然対数の底である．