

### §0.3 述語の合成

述語  $A$  から、“ $A$  でない”という述語ができます。この述語を  $A$  の否定といいます。命題  $A$  の否定“ $A$  でない”は、 $A$  が成り立たないことを意味します。

**例** 人を表す変数  $x$  に関する述語“ $x$  は男性である”の否定は、 $x$  に関する述語“ $x$  は男性でない”です。 終

**例** 数を表す変数  $a$  に関する述語“ $a=0$ ”の否定は、 $a$  に関する述語“ $a=0$  でない”つまり“ $a \neq 0$ ”です。数を表す変数  $x$  に関する述語“ $x > 0$ ”の否定は、 $x$  に関する述語“ $x > 0$  でない”つまり“ $x \not> 0$ ”です。 終

式  $A$  と  $B$  について、述語“ $A \neq B$ ”は述語“ $A = B$ ”の否定で、述語“ $A \not< B$ ”は述語“ $A < B$ ”の否定で、述語“ $A \not> B$ ”は述語“ $A > B$ ”の否定で、述語“ $A \not\leq B$ ”は述語“ $A \leq B$ ”の否定で、述語“ $A \not\geq B$ ”は述語“ $A \geq B$ ”の否定です。

述語  $A$  と述語  $B$  とから、“ $A$  かつ  $B$ ”という述語ができます。この述語は、 $A$  と  $B$  との両方であることを意味します。

**例** 2022年3月まで、日本の法律では、日本人男性と日本人女性とが結婚するためには、男性が18歳以上であり女性が16歳以上であることが一つの条件になっています。つまり、日本人男性を表す変数  $x$  と日本人女性を表す変数  $y$  について、 $x$  と  $y$  とに関する述語“ $x$  と  $y$  とは結婚できる”が成り立つためには、 $x$  に関する述語“ $x$  は18歳以上である”と  $y$  に関する述語“ $y$  は16歳以上である”とからできる述語“ $x$  は18歳以上でありかつ  $y$  は16歳以上である”が成り立たなければなりません。敷衍すると、 $x$  と  $y$  とが結婚できるためには、“ $x$  が18歳以上である”ことと“ $y$  が16歳以上である”こととの両方が成り立たなければなりません。 終

述語  $A$  と述語  $B$  とから、“ $A$  または  $B$ ”という述語ができます。この述語は、 $A$  と  $B$  との少なくともどちらか（両方でもよい）であることを意味します<sup>4)</sup>。

**例** 日本の法律では、生まれたとき（法律上の）父親または母親が日本国籍であった人は日本国籍を取得できます。つまり、人を表す変数  $x$  について、 $x$  に関する述語“生まれたとき  $x$  の父親の国籍は日本であった”と“生まれたとき  $x$  の母親の国籍は日本であった”とからできる述語“生まれたとき  $x$  の父親の国籍が日本であったかまたは  $x$  の母親の国籍が日本であった”という述語が成り立つとき、述語“ $x$  は日本国籍を取得できる”が成り立ちます。敷衍すると、 $x$  が生まれたときに“ $x$  の父親の国籍が日本であった”と“ $x$  の母親の国籍が日本であった”との少なくとも一方が成り立つ（両方成り立ってもよい）とき、“ $x$  は日本国籍を取得できる”が成り立ちます。 終

述語  $A$  と述語  $B$  とから、“ $A$  ならば  $B$ ”という述語ができます。この述語は、 $A$  であるときは  $B$  であることを意味します。 $A$  でないときは、 $B$  であるか  $B$  でないか言及していないので、 $B$  であっても  $B$  でなくても構いません。

**例** 2022年3月まで、日本の法律では、未成年が結婚（初婚に限る）するときは親に結婚について同意を得なければなりません。つまり、日本人を表す変数  $x$  に関する述語“ $x$  が結婚できる”が成り立つには、 $x$  に関する述語“ $x$  が未成年である”と“ $x$  は親に結婚について同意を得ている”とからできる述語“ $x$  が未成年であるならば  $x$  は親に結婚について同意を得ている”が成り立たなければなりません。敷衍すると、 $x$  が結婚できるには、 $x$  が未成年であるとき  $x$  は親に結婚について同意を得なければならず、 $x$  が未成年でないときは  $x$  は親に結婚について同意を得なければならないとは限りません。ですから、 $x$  が未成年でないかまたは  $x$  が親に結婚について同意を得ているとき、 $x$  は結婚できるかもしれません。このように考えると、 $x$  に関する述語“ $x$  が未成年であるならば  $x$  は親に結婚について同意を得ている”は、 $x$  に関する述語“ $x$  は未成年でないかまたは  $x$  は親に結婚について同意を得ている”と意味が同じになります。 終

この例と同じような考えで、数学では、述語  $A$  と述語  $B$  とからできる述語“ $A$  ならば  $B$ ”は、述語“ $A$  でないかまたは  $B$ ”と意味が同じであると考えます<sup>5)</sup>。

変数  $x$  に関する述語  $A$  から、“任意の  $x$  について  $A$ ”という述語ができます；この述語は“ $x$  の値が何であっても条件  $A$  が成り立つ”ことを意味します。例えば変数  $x$  の値が整数に限定されているときは、“任意の整数  $x$  について  $A$ ”あるいは“各整数  $x$  について  $A$ ”のように記述します；この述語は“ $x$  の値がどんな整数であっても条件  $A$  が成り立つ”ことを意味します。

**例** 人を表す変数  $x$  に関する述語“ $x$  は母親から生まれた”から、“任意の人  $x$  について  $x$  は母親から生まれた”という命題ができます。この命題の意味は、人は誰も母親から生まれたということです。 終

**例** 数を表す変数  $x$  と  $y$  とに関する述語“ $x+y=y+x$ ”から、“任意の数  $x$  と  $y$  について  $x+y=y+x$ ”とか“各数  $x$  と  $y$  について  $x+y=y+x$ ”とかのような命題ができます。この命題は、“変数  $x, y$  の値がどんな数でも  $x+y=y+x$ ”という意味です。 終

変数  $x$  に関する述語  $A$  から、“ある  $x$  について  $A$ ”あるいは“ $A$  である  $x$  がある”という述語ができます；この述語は“条件  $A$  が成り立つような  $x$  の値がある”あるいは“ $x$  の値を適切に決めると条件  $A$ ”ことを意味します。例えば変数  $x$  の値が整数に限定されているときは、“ある整数  $x$  について  $A$ ”とか“ $A$  である整数  $x$  がある”のように記述します；この述語は“条件  $A$  が成り立つ  $x$  の値が整数の中にある”ことを意味します。

**例** あるクラスの学生を表す変数  $x$  に関する述語“ $x$  は女子である”から、“このクラスのある学生  $x$  について  $x$  は女子である”という命題ができます。この命題の意味は、このクラスの学生の中に女子がいるということです。 終

**例** 整数  $n$  が偶数であるとは、 $n=2m$  となる整数  $m$  があることです。つまり、整数を表す変数  $n$  に関する述語“ $n$  は偶数である”が成り立つのは、整数を表す変数  $n$  と  $m$  とに関する述語“ $n=2m$ ”からできる述語“ある整数  $m$  について  $n=2m$ ”が成り立つときです。 終

数学では、日常生活で扱う文より論理的にやや複雑な文を扱うことがあります。そのような文は、“～でない”、“かつ”、“または”、“ならば”、“任意の”、“ある”、などの言葉を使って注意深く記述しないと、意味が曖昧になることがあります。

**例** 正の整数  $n$  が素数であるとは、 $n \geq 2$  で  $n$  の正の約数が  $1$  と  $n$  とだけであることです。厳密にいうと、正の整数を表す変数  $n$  に関する述語“ $n$  素数である”は、“ $n \geq 2$ 、かつ、正の任意の整数  $m$  について、 $m$  が  $n$  の約数であるならば、 $m=1$  または  $m=n$ ”ということです。 終

<sup>4)</sup> 述語  $A$  と述語  $B$  とに対して、日常の言葉では、“ $A$  または  $B$ ”というとき、 $A$  と  $B$  との少なくともどちらか（両方でもよい）である場合と、 $A$  と  $B$  とのどちらか一方だけ（両方はだめ）である場合ととの、2つの場合があります。

<sup>5)</sup> “ならば”という言葉は、日常生活では状況や文脈によっていろいろな意味で用いますが、数学では単純な意味で用います。