

第0章の補遺2 命題の真偽と同値性

命題 P と命題 Q について、 P と Q とが同値である、つまり、

“ P ならば Q ” が成り立ち、“ Q ならば P ” も成り立つ

ということは、

P が正しいとき Q も正しく、 Q が正しいとき P も正しい、

つまり

P が真のとき Q も真で、 Q が真のとき P も真である

ということですから、

P と Q との両方とも真であるか両方とも偽である

ことです。つまり、命題 P と命題 Q とが同値であるとは、命題 P と命題 Q との真偽が常に同じになることです。

命題 A と B とからできる命題“ A でないかまたは B ”の真偽を考えます。

B が真のとき、“ A でないかまたは B ”は真；

A が偽のとき、“ A でない”は真なので“ A でないかまたは B ”は真；

A が真で B が偽のとき、“ A でない”は偽なので“ A でないかまたは B ”は偽。

これらのことから、命題“ A でないかまたは B ”の真理値表ができます。これと、命題“ A ならば B ”の真理値表とを比べてみます。

| A | B | A でない | A でないかまたは B | A ならば B |
|-----|-----|---------|-----------------|-------------|
| 真 | 真 | 偽 | 真 | 真 |
| 真 | 偽 | 偽 | 偽 | 偽 |
| 偽 | 真 | 真 | 真 | 真 |
| 偽 | 偽 | 真 | 真 | 真 |

この真理値表から分かるように、命題“ A でないかまたは B ”の真偽と命題“ A ならば B ”の真偽とは常に同じです。つまり、命題“ A でないかまたは B ”と命題“ A ならば B ”とは同値です。

命題 A と B とに対して、命題“ A ならば、 B ”の真偽と、命題“ B でないならば、 A でない”の真偽とを考えます。真理値表は次のようになります。

| A | B | B でない | A でない | B でないならば、 A でない | A ならば B |
|-----|-----|---------|---------|---------------------|-------------|
| 真 | 真 | 偽 | 偽 | 真 | 真 |
| 真 | 偽 | 真 | 偽 | 偽 | 偽 |
| 偽 | 真 | 偽 | 真 | 真 | 真 |
| 偽 | 偽 | 真 | 真 | 真 | 真 |

このように、命題“ A ならば B ”の真偽と、命題“ B でないならば、 A でない”の真偽とは常に同じになります。つまり、命題“ A ならば B ”とその命題“ B でないならば、 A でない”とは同値になります。