## §1.2　冪と指数法則

数 $a$ 及び正の整数 $n$ に対して，$a$ を $n$ 個掛け合わせた積を $a^n$ と書き表し，$a$ の $n$ 乗といいます：

$$a^n = \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n\text{ 個の } a \text{ の積}} \ .$$

例えば次のようになります：数 $c, t, x$ について，

$$c^2 = c \times c\ , \qquad t^3 = t \times t \times t\ , \qquad x^5 = x \times x \times x \times x \times x\ .$$

当然，$a^1 = a$ です．また，

$$a^n \times a = (\overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n\text{ 個の } a \text{ の積}}) \times a = \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a \times a}^{(n+1)\text{ 個の } a \text{ の積}} = a^{n+1}$$

つまり $a^n \times a = a^{n+1}$ ．この等式は $n = 0$ のときも成り立つことが望まれます；つまり，$a^0 \times a = a^1 = a$ となることが望まれます．そのために数 $a$ の 0 乗 $a^0$ を次のように定義します．

**定義**　0 以外の任意の数 $a$ に対して $a^0 = 1$ ．

このように同じ数を何個か（0 個以上）掛け合わせた積（の形の式）を，**冪**（べき）(power) または累乗といいます．また，数 $a$ の $n$ 乗の式 $a^n$ において，$n$ を**指数** (exponent) といいます．

例として数 $a$ に対して $a^2a^3$ を計算します：

$$a^2a^3 = (a \times a) \times (a \times a \times a) = a \times a \times a \times a \times a = a^5\ .$$

一般的に，数 $a$ と自然数 $m, n$ とについて，

$$\begin{aligned} a^m a^n &= (\overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{m\text{ 個の } a \text{ の積}}) \times (\overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n\text{ 個の } a \text{ の積}}) = \overbrace{a \times a \times a \times a \times \cdots \times a}^{(m+n)\text{ 個の } a \text{ の積}} \\ &= a^{m+n}\ , \end{aligned}$$

つまり $a^m a^n = a^{m+n}$ ．

例として数 $a$ に対して $(a^2)^3$ を計算します：

$$(a^2)^3 = (a \times a)^3 = (a \times a) \times (a \times a) \times (a \times a) = a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6\ .$$

一般的に，数 $a$ と自然数 $m, n$ とについて，

$$\begin{aligned} (a^m)^n &= \underbrace{(\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{m\text{ 個の } a \text{ の積}}) \times (\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{m\text{ 個の } a \text{ の積}}) \times \cdots \times (\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{m\text{ 個の } a \text{ の積}})}_{m\text{ 個の } a \text{ の積が } n \text{ 個}} \\ &= \overbrace{a \times a \times a \times a \times \cdots \times a}^{mn\text{ 個の } a \text{ の積}} = a^{mn}\ , \end{aligned}$$

つまり $(a^m)^n = a^{mn}$ ．

例として 0 以外の数 $a$ に対して $\dfrac{a^5}{a^3}$ を計算します：

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a} = a \times a = a^2\ .$$

一般的に，0 以外の数 $a$ と自然数 $m, n$ とについて，$m \geq n$ のとき，

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a \times a}^{m\text{ 個の } a \text{ の積}}}{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{ 個の } a \text{ の積}}} = \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{(m-n)\text{ 個の } a \text{ の積}} = a^{m-n}\ ,$$

つまり $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ．

以上の結果を**指数法則**といいます．

> **定理**（自然数指数の指数法則）　任意の数 $a$ と任意の自然数 $m, n$ とについて，
>
> $$a^m a^n = a^{m+n}\ , \qquad (a^m)^n = a^{mn}\ ,$$
>
> $$a \neq 0 \text{ で } m \geq n \text{ のとき} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\ .$$

例として数 $a, b$ に対して $(ab)^3$ を計算します：

$$(ab)^3 = ab \times ab \times ab = a \times a \times a \times b \times b \times b = (a \times a \times a) \times (b \times b \times b) = a^3b^3\ .$$

一般的に，数 $a, b$ と自然数 $n$ とについて $(ab)^n = a^nb^n$ です：

$$\begin{aligned} (ab)^n = (a \times b)^n &= \overbrace{(a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) \times \cdots \times (a \times b)}^{n\text{ 個の } a \times b \text{ の積}} \\ &= \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n\text{ 個の } a \text{ の積}} \times \overbrace{b \times b \times b \times \cdots \times b}^{n\text{ 個の } b \text{ の積}} \\ &= a^nb^n\ . \end{aligned}$$

例として数 $a, b$（$b \neq 0$）に対して $\left(\dfrac{a}{b}\right)^4$ を計算します：

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a \times a \times a \times a}{b \times b \times b \times b} = \frac{a^4}{b^4}\ .$$

一般的に，数 $a, b$（$b \neq 0$）と自然数 $n$ とについて $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ です：

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \overbrace{\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \cdots \times \frac{a}{b}}^{n\text{ 個の } \frac{a}{b} \text{ の積}} = \frac{\overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n\text{ 個の } a \text{ の積}}}{\underbrace{b \times b \times b \times \cdots \times b}_{n\text{ 個の } b \text{ の積}}} = \frac{a^n}{b^n}\ .$$

このようにして次の定理が導かれます．この定理も指数法則と呼ばれます．

> **定理**（自然数指数の指数法則）　任意の数 $a, b$ と任意の自然数 $n$ とについて，
>
> $$(ab)^n = a^nb^n\ , \qquad b \neq 0 \text{ のとき} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}\ .$$

$\boxed{\text{例題}}$　数 $a, b, x, y$ は 0 以外の数とする．次の式を計算して簡単にする：$2a^3b(3ab^3)^2$ , $6x^5y\left(\dfrac{y^2}{3x}\right)^2$ .

$$\begin{aligned} 2a^3b(3ab^3)^2 &= 2a^3b \cdot 3^2a^2(b^3)^2 = 2a^3b \cdot 9a^2b^6 = 18a^{3+2}b^{1+6} \\ &= 18a^5b^7\ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6x^5y\left(\frac{y^2}{3x}\right)^2 &= 6x^5y\frac{(y^2)^2}{(3x)^2} = 6x^5y\frac{y^{2\cdot2}}{3^2x^2} = 6x^5y\frac{y^4}{9x^2} = \frac{6}{9}x^{5-2}y^{1+4} \\ &= \frac{2}{3}x^3y^5\ . \end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 1.2}}$　数 $a, b, c, d, x, y$ は 0 でないとします．以下の式を計算して簡単にしなさい．

(1) $3ab^2(2a^2b)^3$ .　　(2) $\dfrac{4y^7}{3x^4}\left(\dfrac{x^2}{2y}\right)^3$ .　　(3) $\dfrac{(3c^2d)^3}{6c^4d}$ .