

§ 1.9 複素数の性質

総ての実数は複素数であり、複素数と複素数との和・差・積・商はやはり複素数です。実数 b と虚数単位 i は複素数ですから、それらの積 ib は複素数です。また、複素数 ib と実数 a との和 $a+ib$ も複素数です。つまり、任意の実数 a と b に対して $a+ib$ は複素数です。このような形の複素数どうしの和・差・積・商を考えます。

例 複素数 $\alpha = 5 - 4i$ と $\beta = 2 + 3i$ について次のように四則演算ができます：

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= 5 - 4i + 2 + 3i = 7 - i, \\ \alpha - \beta &= 5 - 4i - (2 + 3i) = 3 - 7i, \\ \alpha\beta &= (5 - 4i)(2 + 3i) = 10 + 15i - 8i - 12i^2 = 10 + 7i + 12 \\ &= 22 + 7i, \\ \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{5 - 4i}{2 + 3i} = \frac{(5 - 4i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \frac{10 - 15i - 8i + 12i^2}{2^2 - 3^2i^2} = \frac{10 - 23i - 12}{4 + 9} \\ &= -\frac{2}{13} - \frac{23}{13}i. \quad \text{終}\end{aligned}$$

このように計算すると、 $a+ib$ (a, b は実数) の形の複素数どうしの和・差・積・商はやはり $a+ib$ (a, b は実数) の形に整理できます。ですから、複素数は $a+ib$ (a, b は実数) の形で総て間に合います。

複素数とは $a+ib$ (a, b は実数) の形で表せる数である。

複素数 α について $\alpha = a+ib$ (a, b は実数) であるとき、実数 a を複素数 α の実部といい、実数 b を複素数 α の虚部といいます。

複素数について以下の定理が成り立ちます。証明は後に回します。

定理 1.9.1 実数 a と b について、

$$a+ib = 0 \iff a = b = 0.$$

定理 1.9.2 実数 a, b, c, d について、

$$a+ib = c+id \iff a = c \text{ かつ } b = d.$$

例題 実数 x と y について $(2x+y)+i(x+3y) = 4-3i$ とする。このような実数 x, y を求める。

【解説】 x と y とは実数なので、 $2x+y$ と $x+3y$ とは実数である。 $(2x+y)+i(x+3y) = 4-3i$ なので、定理 1.9.2 より、 $2x+y = 4$ かつ $x+3y = -3$ 。 x と y に関するこの連立方程式を解くと、 $x = 3$ かつ $y = -2$ 。終

問題 1.9.1 実数 x と y について $(x-4y)+i(2x+3y) = 17+i$ とします。このような実数 x, y を求めなさい。

例題 実数 a と b について $a(5+2i)+b(4-3i) = 1-18i$ とする。このような実数 a, b を求める。

【解説】 まず等式の左辺 $a(5+2i)+b(4-3i)$ を整理する：

$$a(5+2i)+b(4-3i) = 5a+2ai+4b-3bi = 5a+4b+i(2a-3b).$$

a と b とは実数なので、 $5a+4b$ と $2a-3b$ とは実数である。 $5a+4b+i(2a-3b) = 1-18i$ なので、定理 1.9.2 より、 $5a+4b = 1$ かつ $2a-3b = -18$ 。 a と b に関するこの連立方程式を解くと、 $a = -3$ かつ $b = 4$ 。終

問題 1.9.2 実数 a と b について $a(3+4i)-b(5-2i) = 19+8i$ とします。このような実数 a, b を求めなさい。

複素数は $a+ib$ (a, b とは実数) の形で表せます。ここで $b = 0$ のとき、 $a+ib = a+i\cdot 0 = a$ は実数です。かたや、 $b \neq 0$ のときは、 $a+ib$ は実数でない複素数つまり虚数になります。

定理 1.9.3 実数 a と b について、

$$\begin{aligned}\text{複素数 } a+ib \text{ が実数である} &\iff b = 0, \\ \text{複素数 } a+ib \text{ が虚数である} &\iff \text{複素数 } a+ib \text{ が実数でない} \\ &\iff b \neq 0.\end{aligned}$$

例題 実数を表す変数 x について、複素数 $(3-2i)(x+4i)$ が実数である条件をなるべく簡単に表す。

$$(3-2i)(x+4i) = 3x+12i-2xi-8\cdot(-1) = 3x+8+i(12-2x).$$

$3x+8$ と $12-2x$ とは実数なので、複素数 $(3-2i)(x+4i)$ が実数である条件は、 $12-2x = 0$ 、つまり $x = 6$ 。終

問題 1.9.3 実数を表す変数 x について、複素数 $(4-3i)(x+6i)$ が実数である条件をなるべく簡単に表しなさい。

例題 実数を表す変数 x について、複素数 $(2+3i)(x-6i)$ が虚数である条件をなるべく簡単に表す。

$$(2+3i)(x-6i) = 2x-12i+3xi+18 = 2x+18+i(3x-12).$$

$2x+18$ と $3x-12$ とは実数なので、複素数 $(2+3i)(x-6i)$ が虚数である条件は、 $3x-12 \neq 0$ 、つまり $x \neq 4$ 。終

問題 1.9.4 実数を表す変数 x について、複素数 $(3-4i)(x+8i)$ が虚数である条件をなるべく簡単に表しなさい。

なお、虚数については大小関係を考えません⁸⁾。ですから、不等式の右辺及び左辺の数は実数に限ります。

——— 定理の証明

定理 1.9.1 実数 a と b について、

$$a+ib = 0 \iff a = b = 0.$$

証明 $a = b = 0$ ならば $a+bi = 0+0i = 0$ 。

$a+ib = 0$ と仮定する。 $a = -ib$ なので、 $a^2 = (-ib)^2$ 、この等式の右辺は $(-ib)^2 = i^2b^2 = -b^2$ なので

$$a^2 = -b^2.$$

a, b は実数なので、定理 1.5.10 より、 $a^2 \geq 0$ 、 $b^2 \geq 0$ なので $-b^2 \leq 0$ 。定理 1.5.4 より

$$a^2 = -b^2 = 0.$$

従って定理 1.1.2 より $a = b = 0$ 。(証明終り)

定理 1.9.2 実数 a, b, c, d について、

$$a+ib = c+id \iff a = c \text{ かつ } b = d.$$

証明 定理 1.9.1 より、

$$\begin{aligned}a+ib = c+id &\iff a-c+i(b-d) = 0 \iff a-c = 0 \text{ かつ } b-d = 0 \\ &\iff a = c \text{ かつ } b = d.\end{aligned}$$

定理 1.9.3 実数 a と b について、

$$\text{複素数 } a+ib \text{ が実数である} \iff b = 0.$$

証明 複素数 $a+ib$ が実数であるとする。 $c = a+ib$ とおく。 $a+bi = c+0i$ で a, b, c は実数なので、定理 1.9.2 より $b = 0$ 。

逆に $b = 0$ ならば $a+ib = a$ は実数である。(証明終り)

⁸⁾ 仮に虚数についても実数と同じような大小関係があるとする。定理 1.5.10 の証明と同様に推論すると、虚数単位 i について $i^2 \geq 0$ ；しかし $i^2 = -1 < 0$ なので、矛盾が生じます。故に、虚数については実数と同じようには大小関係を考えません。