§10.3　還元公式

任意の実数 x について，定理 6.4.3 より $\sin(-x\,\mathrm{rad}) = -\sin(x\,\mathrm{rad})$ なので，

$$\sin(-x) = \sin(-x\,\mathrm{rad}) = -\sin(x\,\mathrm{rad}) = -\sin x \ .$$

同様に，定理 6.4.3 より $\cos(-x\,\mathrm{rad}) = \cos(x\,\mathrm{rad})$ なので，

$$\cos(-x) = \cos(-x\,\mathrm{rad}) = \cos(x\,\mathrm{rad}) = \cos x \ .$$

更に，定理 10.2.2 より，x が $\dfrac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとき

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x \ .$$

定理 10.3.1　任意の実数 x について，

$$\sin(-x) = -\sin x \ , \qquad \cos(-x) = \cos x \ ,$$

$$x \text{ が } \frac{\pi}{2} \text{ の奇数倍でないとき} \quad \tan(-x) = -\tan x \ .$$

つまり，正弦関数 $\sin x$ と正接関数 $\tan x$ とは奇関数で，余弦関数 $\cos x$ は偶関数です.

x は任意の実数とします．定理 6.5 より

$$\sin(x\,\mathrm{rad} + 90^\circ) = \cos(x\,\mathrm{rad}) = \cos x \ ,$$

$90^\circ = \dfrac{\pi}{2}\mathrm{rad}$ なので

$$\sin(x\,\mathrm{rad} + 90^\circ) = \sin\left(x\,\mathrm{rad} + \frac{\pi}{2}\mathrm{rad}\right) = \sin\left\{\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{rad}\right\} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \ ,$$

よって $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$ ．また，定理 6.5 より

$$\cos(x\,\mathrm{rad} + 90^\circ) = -\sin(x\,\mathrm{rad}) = -\sin x \ ,$$

$90^\circ = \dfrac{\pi}{2}\mathrm{rad}$ なので

$$\cos(x\,\mathrm{rad} + 90^\circ) = \cos\left(x\,\mathrm{rad} + \frac{\pi}{2}\mathrm{rad}\right) = \cos\left\{\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{rad}\right\} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \ ,$$

よって $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ ．

実数 X について $\sin\left(X + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos X$ つまり $\cos X = \sin\left(X + \dfrac{\pi}{2}\right)$ ，この等式において $X = x - \dfrac{\pi}{2}$ とすると，

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left\{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = \sin x \ .$$

実数 X について $\cos\left(X + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin X$ なので $\sin X = -\cos\left(X + \dfrac{\pi}{2}\right)$ ，この等式において $X = x - \dfrac{\pi}{2}$ とすると，

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left\{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = -\cos x \ .$$

定理 10.3.2　任意の実数 x について，

$$\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos x \ \ \text{（複号同順）}, \qquad \cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp\sin x \ \ \text{（複号同順）}.$$

x は任意の実数とします．実数 X について $\sin\left(X + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos X$ ；この等式において $X = x + \dfrac{\pi}{2}$ とすると

$$\sin\left\{\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \ ,$$

$\sin\left\{\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + \dfrac{\pi}{2}\right\} = \sin(x + \pi)$ なので $\sin(x + \pi) = -\sin x$ ．また，実数 X について $\cos\left(X + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin X$ ；この等式において $X = x + \dfrac{\pi}{2}$ とすると

$$\cos\left\{\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x \ ,$$

$\cos\left\{\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + \dfrac{\pi}{2}\right\} = \cos(x + \pi)$ なので $\cos(x + \pi) = -\cos x$ ．同様に，

$$\sin(x - \pi) = \sin\left\{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right\} = -\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \ ,$$

$$\cos(x - \pi) = \cos\left\{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right\} = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x \ .$$

定理 10.3.3　任意の実数 x について，

$$\sin(x \pm \pi) = -\sin x \ , \qquad \cos(x \pm \pi) = -\cos x \ .$$

x は任意の実数とします．実数 X について $\sin(X + \pi) = -\sin X$ ；この等式において $X = x + \pi$ とすると

$$\sin\{(x + \pi) + \pi\} = -\sin(x + \pi) = -(-\sin x) = \sin x \ ,$$

$\sin\{(x + \pi) + \pi\} = \sin(x + 2\pi)$ なので $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ ．また，実数 X について $\cos(X + \pi) = -\cos X$ ；この等式において $X = x + \pi$ とすると

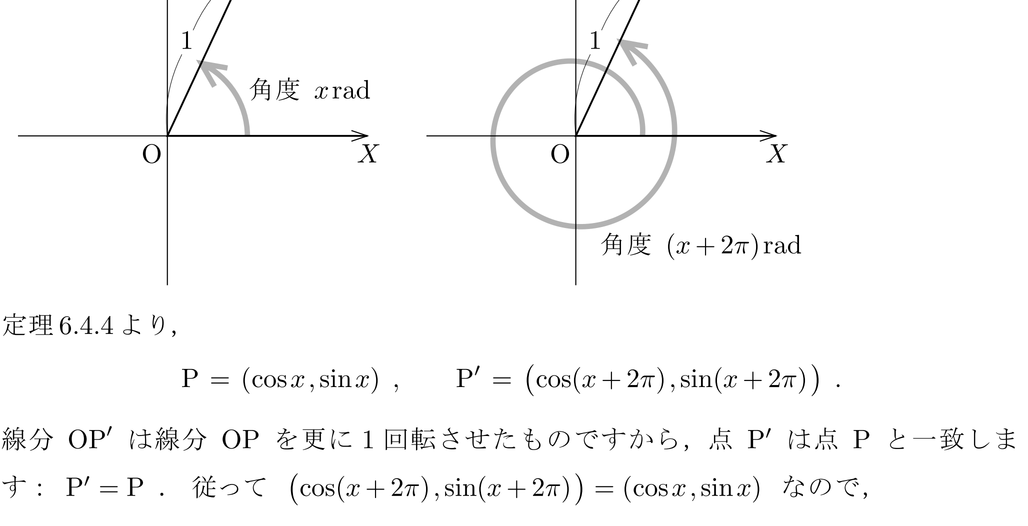
$$\cos\{(x + \pi) + \pi\} = -\cos(x + \pi) = -(-\cos x) = \cos x \ ,$$

$\cos\{(x + \pi) + \pi\} = \cos(x + 2\pi)$ なので $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ ．

こうして次のことが分かります：任意の実数 x について，

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \ , \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x \ .$$

このことは次のように考えても分かります．XY 座標平面において原点 O を極として X 軸の向きに伸びる OX を始線とします．実数 x に対して，次のような点 P をとります：始線 OX に対する角度 $x\,\mathrm{rad}$ の動径に P が属し，$\overline{\mathrm{OP}} = 1$ ．更に，次のような点 P′ をとります：始線 OX に対する角度 $(x + 2\pi)\,\mathrm{rad}$ の動径に P′ が属し，$\overline{\mathrm{OP'}} = 1$ ．



定理 6.4.4 より，

$$\mathrm{P} = (\cos x, \sin x) \ , \qquad \mathrm{P'} = \big(\cos(x + 2\pi), \sin(x + 2\pi)\big) \ .$$

線分 OP′ は線分 OP を更に 1 回転させたものですから，点 P′ は点 P と一致します：$\mathrm{P'} = \mathrm{P}$ ．従って $\big(\cos(x + 2\pi), \sin(x + 2\pi)\big) = (\cos x, \sin x)$ なので，

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \ , \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin x \ .$$

x は任意の実数とします．任意の実数 X について $\sin X = \sin(X + 2\pi)$ なので，

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin(x + 2\pi) = \sin\{(x + 2\pi) + 2\pi\}\\ &= \sin(x + 4\pi) = \sin\{(x + 4\pi) + 2\pi\}\\ &= \sin(x + 6\pi) = \sin\{(x + 6\pi) + 2\pi\}\\ &= \sin(x + 8\pi) = \cdots \ .\end{aligned}$$

同様に，任意の実数 X について $\sin X = \sin\{(X - 2\pi) + 2\pi\} = \sin(X - 2\pi)$ なので，

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin(x - 2\pi) = \sin\{(x - 2\pi) - 2\pi\}\\ &= \sin(x - 4\pi) = \sin\{(x - 4\pi) - 2\pi\}\\ &= \sin(x - 6\pi) = \sin\{(x - 6\pi) - 2\pi\}\\ &= \sin(x - 8\pi) = \cdots \ .\end{aligned}$$

余弦関数 $\cos x$ についても同様のことが成り立ちます：

$$\cos x = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4\pi) = \cos(x + 6\pi) = \cos(x + 8\pi) = \cdots \ ,$$

$$\cos x = \cos(x - 2\pi) = \cos(x - 4\pi) = \cos(x - 6\pi) = \cos(x - 8\pi) = \cdots \ .$$

つまり次のようになります：

$$\sin\big(x \pm (\pi \text{ の偶数倍})\big) = \sin x \ , \qquad \cos\big(x \pm (\pi \text{ の偶数倍})\big) = \cos x \ .$$

定理 10.3.4　任意の整数 n 及び任意の実数 x について，

$$\sin(x \pm 2n\pi) = \sin x \ , \qquad \cos(x \pm 2n\pi) = \cos x \ .$$

実数 X は $\dfrac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとします．定理 10.3.3 より $\sin(X + \pi) = -\sin X$ ，$\cos(X + \pi) = -\cos X$ なので，定理 10.1 より，

$$\tan(X + \pi) = \frac{\sin(X + \pi)}{\cos(X + \pi)} = \frac{-\sin X}{-\cos X} = \frac{\sin X}{\cos X} = \tan X \ .$$

つまり $\tan X = \tan(X + \pi)$ ．このことから，実数 x が $\dfrac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとき，

$$\begin{aligned}\tan x &= \tan(x + \pi) = \tan\{(x + \pi) + \pi\}\\ &= \tan(x + 2\pi) = \tan\{(x + 2\pi) + \pi\}\\ &= \tan(x + 3\pi) = \tan\{(x + 3\pi) + \pi\}\\ &= \tan(x + 4\pi) = \cdots \ ;\end{aligned}$$

$\tan(X - \pi) = \tan\{(X - \pi) + \pi\} = \tan X$ つまり $\tan X = \tan(X - \pi)$ なので，

$$\begin{aligned}\tan x &= \tan(x - \pi) = \tan\{(x - \pi) - \pi\}\\ &= \tan(x - 2\pi) = \tan\{(x - 2\pi) - \pi\}\\ &= \tan(x - 3\pi) = \tan\{(x - 3\pi) - \pi\}\\ &= \tan(x - 4\pi) = \cdots \ .\end{aligned}$$

定理 10.3.5　任意の整数 n 及び任意の実数 x について，

$$x \text{ が } \frac{\pi}{2} \text{ の奇数倍でないとき} \quad \tan(x \pm n\pi) = \tan x \ .$$

例題　次の式の値を求める：$\sin\dfrac{29\pi}{3}$ ．

$$\sin\frac{29\pi}{3} = \sin\left(\frac{29\pi}{3} - 10\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

次のようにも計算できる：

$$\begin{aligned}\sin\frac{29\pi}{3} &= \sin\left(\frac{29\pi}{3} - 8\pi\right) = \sin\frac{5\pi}{3} = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \pi\right)\\ &= -\sin\frac{2\pi}{3} = -\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\frac{\pi}{6}\\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \ .\end{aligned}$$

終

問題 10.3.1　次の式の値を求めなさい：$\cos\dfrac{35\pi}{6}$ ．

例題　次の式の値を求める：$\sin\left(-\dfrac{19\pi}{6}\right)$ ．

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{19\pi}{6} + 4\pi\right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \ .$$

次のようにも計算できる：

$$\begin{aligned}\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) &= -\sin\frac{19\pi}{6} = -\sin\left(\frac{19\pi}{6} - 2\pi\right) = -\sin\frac{7\pi}{6} = -\sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) = \sin\frac{\pi}{6}\\ &= \frac{1}{2} \ .\end{aligned}$$

終

問題 10.3.2　次の式の値を求めなさい：$\cos\left(-\dfrac{22\pi}{3}\right)$ ．

例題　次の式の値を求める：$\tan\dfrac{14\pi}{3}$ ．

$$\tan\frac{14\pi}{3} = \tan\left(\frac{14\pi}{3} - 5\pi\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} \ .$$

終

問題 10.3.3　次の式の値を求めなさい：$\tan\dfrac{17\pi}{6}$ ．

問題 10.3.4　次の式の値を求めなさい：$\tan\left(-\dfrac{19\pi}{6}\right)$ ．

例題　変数 x を含む式 $\cos\left(x + \dfrac{15\pi}{2}\right)$ を，$\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形する.

$$\cos\left(x + \frac{15\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{15\pi}{2} - 8\pi\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \ .$$

次のようにも計算できる：

$$\begin{aligned}\cos\left(x + \frac{15\pi}{2}\right) &= \cos\left(x + \frac{15\pi}{2} - 6\pi\right) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)\\ &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -(-\sin x)\\ &= \sin x \ .\end{aligned}$$

終

問題 10.3.5　変数 x を含む式 $\sin\left(x + \dfrac{23\pi}{2}\right)$ を，$\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形しなさい.

例題　変数 x を含む式 $\sin\left(x - \dfrac{17\pi}{2}\right)$ を，$\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形する.

$$\sin\left(x - \frac{17\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \frac{17\pi}{2} + 8\pi\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x \ .$$

次のようにも計算できる：

$$\begin{aligned}\sin\left(x - \frac{17\pi}{2}\right) &= \sin\left(x - \frac{17\pi}{2} + 10\pi\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)\\ &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\\ &= -\cos x \ .\end{aligned}$$

終

問題 10.3.6　変数 x を含む式 $\cos\left(x - \dfrac{21\pi}{2}\right)$ を，$\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形しなさい.

例題　変数 x を含む式 $\cos\left(\dfrac{15\pi}{2} - x\right)$ を，$\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形する.

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{15\pi}{2} - x\right) &= \cos\left\{-\left(x - \frac{15\pi}{2}\right)\right\} = \cos\left(x - \frac{15\pi}{2}\right)\\ &= \cos\left(x - \frac{15\pi}{2} + 8\pi\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\\ &= -\sin x \ .\end{aligned}$$

次のようにも計算できる：

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{15\pi}{2} - x\right) &= \cos\left(\frac{15\pi}{2} - x - 8\pi\right) = \cos\left(-x - \frac{\pi}{2}\right)\\ &= \cos\left\{-\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right\} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\\ &= -\sin x \ .\end{aligned}$$

終

問題 10.3.7　変数 x を含む式 $\sin\left(\dfrac{25\pi}{2} - x\right)$ を，$\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形しなさい.