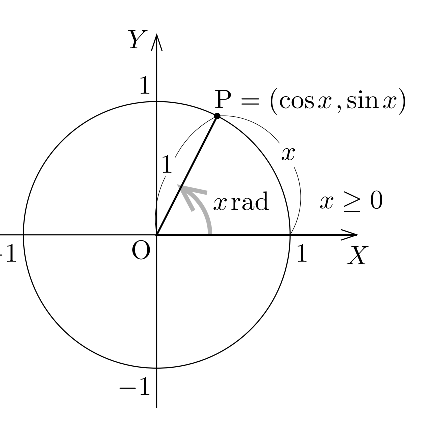
§10.4　三角関数のグラフ

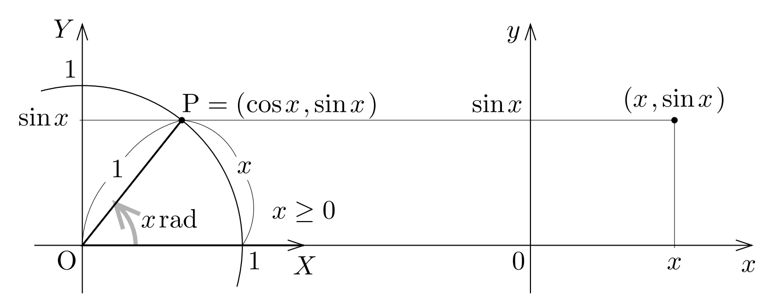
半径 1 の円を単位円といいます．

まず xy 座標平面において正弦関数のグラフを描きます．そのために，もう一つ別の座標系，XY 座標系を考えます．実数 x に対して，XY 座標平面の原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する角度 $x$rad の動径と，原点 O を中心とする単位円との共有点を P とおきます． $\overline{\mathrm{OP}}$ は単位円の半径ですから $\overline{\mathrm{OP}}=1$． 従って定理6.4.5より

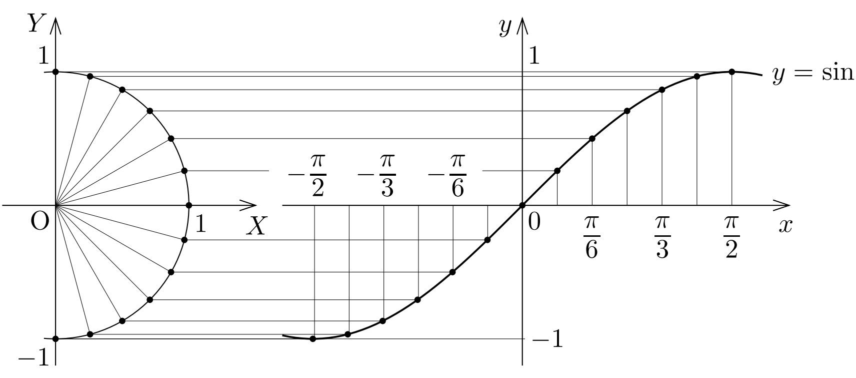
$$\mathrm{P}=(\cos x,\sin x)．$$



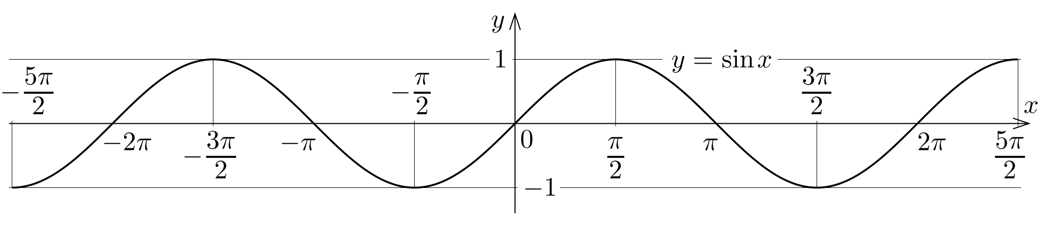
よって点 P の Y 座標は $\sin x$ です． xy 座標系を次のように定めます：x 軸と X 軸とが同じ向きで一直線に重なり，y 軸と Y 軸とが同じ向きである． xy 座標平面において，実数 x に対して例えば次の図のように点 $(x,\sin x)$ をとります．



実数 x に対する点 $(x,\sin x)$ をつないで正弦関数 $y=\sin x$ のグラフを描きます．



正弦関数 $y=\sin x$ のグラフを延ばすと次の図のようになります．



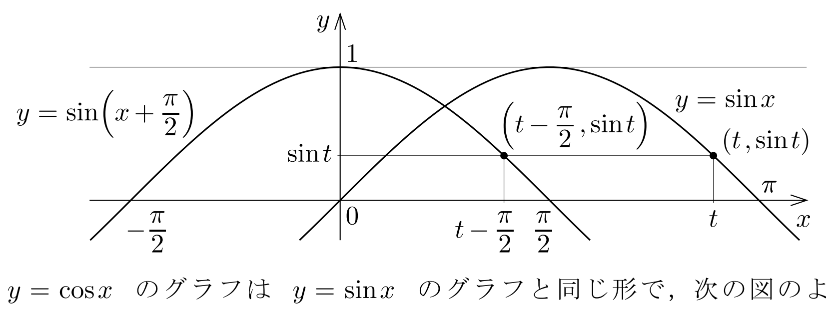
正弦関数 $y=\sin x$ のグラフ

前節で述べたように正弦関数 $\sin x$ は奇関数ですから，定理7.8.2より， $y=\sin x$ のグラフは原点に関して対称です． $y=\sin x$ のグラフの形の曲線を正弦曲線 (sine curve) といいます．

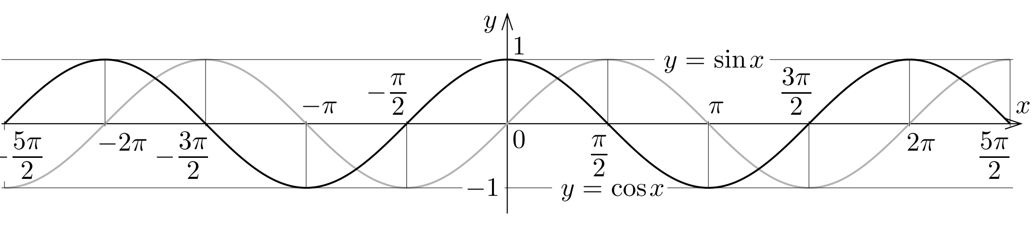
次に，xy 座標平面において余弦関数のグラフを描きます．定理10.3.2を用います：任意の実数 x について $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$． $t=x+\frac{\pi}{2}$ とおきます． このとき $t=x-\frac{\pi}{2}$． 関数 $y=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ のグラフの各点 (x,y) は

$$(x,y)=\left(x,\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)=\left(t-\frac{\pi}{2},\sin t\right)；$$

この点は関数 $y=\sin x$ のグラフの点 $(t,\sin t)$ を x 軸の向きに $-\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動させた点です． よって， $y=\cos x$ のグラフは $y=\sin x$ のグラフを x 軸の向きに $-\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動させた曲線です．



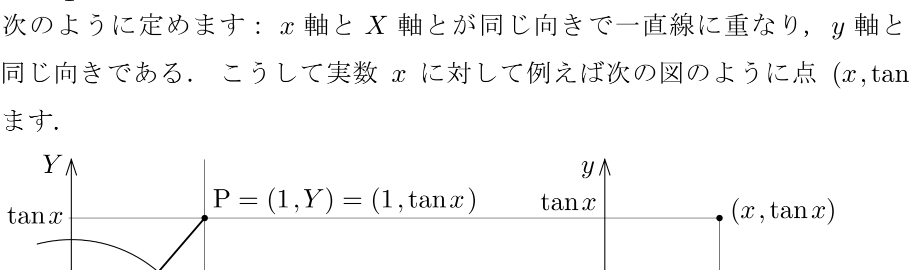
関数 $y=\cos x$ のグラフは $y=\sin x$ のグラフと同じ形で，次の図のようになります．



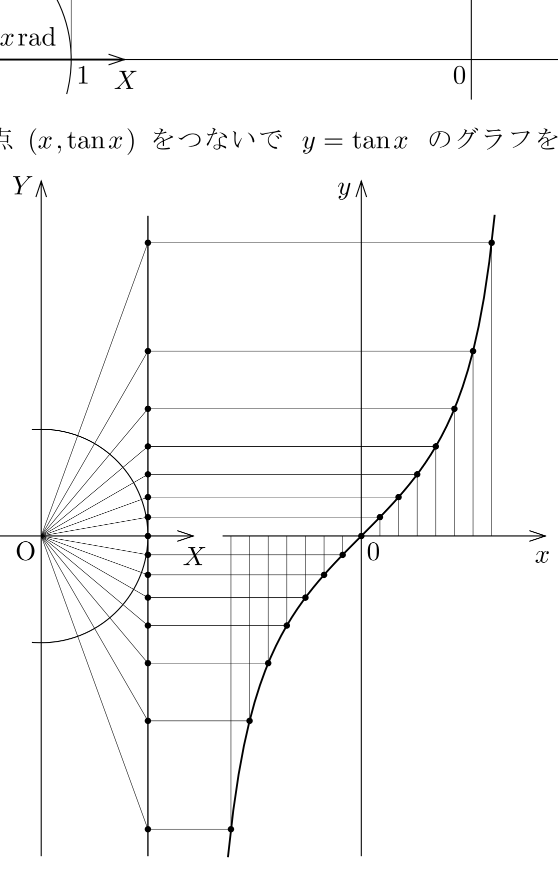
余弦関数 $y=\cos x$ のグラフ

前節で述べたように余弦関数 $\cos x$ は偶関数ですから，定理7.8.2より， $y=\cos x$ のグラフは y 軸に関して対称です．

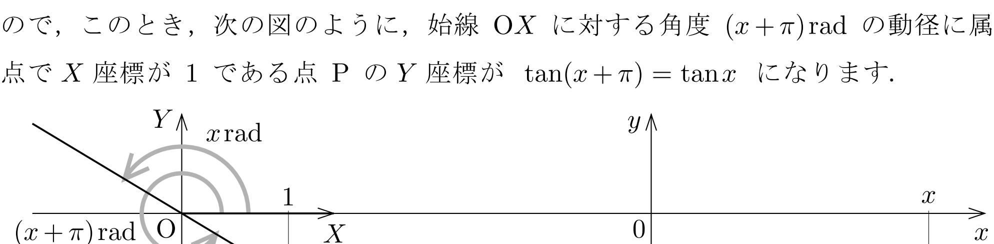
最後に，xy 座標平面において正接関数のグラフを描きます．そのために，もう一つ別の座標系，XY 座標系を考えます．実数 x に対して，XY 座標平面の原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する角度 $x$rad の動径上に属す点 P の X 座標が 1 であるとします． P の Y 座標を Y とおくと， $\mathrm{P}=(1,Y)$，正接の定義より $\tan x=\frac{Y}{1}=Y$ なので， $Y=\tan x$． 従って点P の Y 座標は $\tan x$ です． xy 座標系を次のように定めます：x 軸と X 軸とが同じ向きで一直線に重なり，y 軸と Y 軸とが同じ向きである． こうして実数 x に対して例えば次の図のように点 $(x,\tan x)$ をとります．



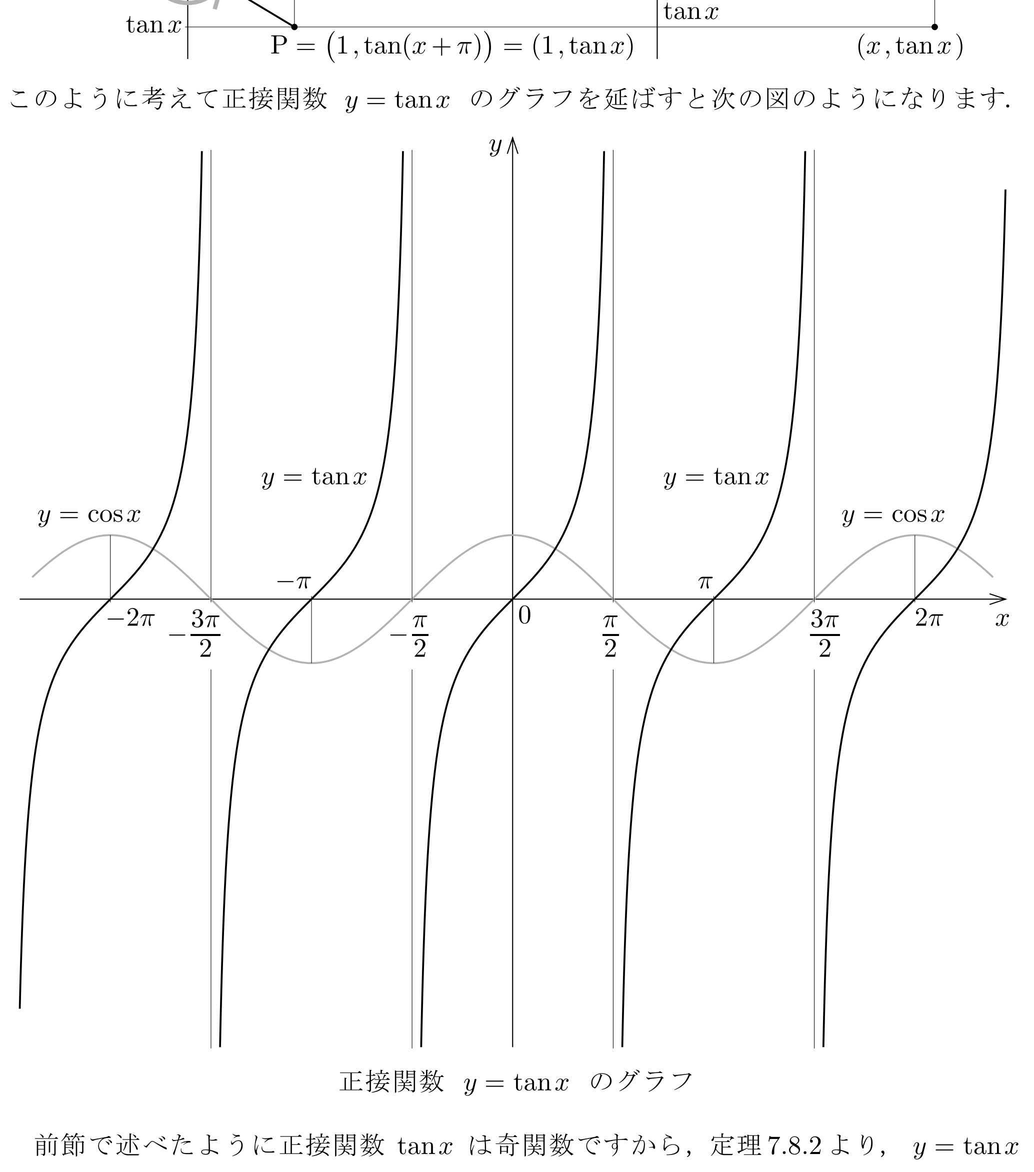
実数 x に対する点 $(x,\tan x)$ をつないで $y=\tan x$ のグラフを描きます．



実数 x が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとき，$\tan x$ の値がありますが，XY 座標平面の原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する角度 $x$rad の動径上に属す点で X 座標が 1 である点が無いことがあります；定理10.3.5より $\tan(x\pm\pi)=\tan x$ なので，このとき，次の図のように，始線 OX に対する角度 $(x+\pi)$rad の動径上に属す点で X 座標が 1 である点 P の Y 座標が $\tan(x+\pi)=\tan x$ になります．



このように考えて正接関数 $y=\tan x$ のグラフを延ばすと次の図のようになります．



正接関数 $y=\tan x$ のグラフ

前節で述べたように正接関数 $\tan x$ は奇関数ですから，定理7.8.2より， $y=\tan x$ のグラフは原点に関して対称です． また，xy 座標平面の直線 $x=\frac{\pi}{2}$，$x=-\frac{\pi}{2}$，$x=\frac{3\pi}{2}$，$x=-\frac{5\pi}{2}$，$x=\frac{5\pi}{2}$，$x=-\frac{3\pi}{2}$ などは $y=\tan x$ のグラフの漸近線になります．