§10.5　三角関数の周期

関数 f 及び 0 でない定数 p について，

$$f \text{ の定義域の任意の点 } x \text{ について} \quad f(x+p)=f(x)$$

となるとき，定数 p を f の**周期** (period) といいます．

次のことが成り立ちました（定理 10.3.4）: 任意の実数 x について，

$$\sin(x\pm 2\pi)=\sin x\ , \quad \sin(x\pm 4\pi)=\sin x\ , \quad \sin(x\pm 6\pi)=\sin x\ , \quad \cdots ;$$

よって，$\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \pm 8\pi, \ldots$ は正弦関数 $\sin x$ の周期です． 余弦関数についても同様です：任意の実数 x について，

$$\cos(x\pm 2\pi)=\cos x\ , \quad \cos(x\pm 4\pi)=\cos x\ , \quad \cos(x\pm 6\pi)=\cos x\ , \quad \cdots ;$$

よって，$\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \pm 8\pi, \ldots$ は余弦関数 $\cos x$ の周期です． また，次のことが成り立ちました（定理 10.3.5）: $\dfrac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 x について，

$$\tan(x\pm\pi)=\tan x\ , \quad \tan(x\pm 2\pi)=\tan x\ , \quad \tan(x\pm 3\pi)=\tan x\ , \quad \cdots ;$$

よって，$\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \pm 4\pi, \ldots$ は正接関数 $\tan x$ の周期です．

関数 f の正の周期の中で最小の実数があるときその実数を f の基本周期 (fundamental period) といいます． 関数 f の基本周期があるとき，f を**周期関数** (periodic function) といいます． 多くの場合単に周期というと基本周期のことを指します． 周期関数の周期を問われたときは基本周期を答えて下さい．

正弦関数のグラフを見ると次のことが分かります： $\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{5\pi}{2}$ である各実数 x について $\sin x<1$． $0<p<2\pi$ である各実数 p について，$\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\pi}{2}+p<\dfrac{5\pi}{2}$ なので $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+p\right)<1$，よって $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+p\right)\neq\sin\dfrac{\pi}{2}$ なので，p は正弦関数の周期ではありません． 2π は正弦関数の周期であり，2π より小さい正の数は正弦関数の周期ではないので，正弦関数の基本周期は 2π です． 同様に余弦関数の基本周期は 2π です． また，正接関数の基本周期は π です．

定数 a, b に対して，関数 $f(x)=\sin(ax+b)$ の基本周期を考えます． 任意の実数 x について，

$$\begin{aligned} f\left(x+\frac{2\pi}{a}\right) &= \sin\left(a\left(x+\frac{2\pi}{a}\right)+b\right)=\sin\left(ax+a\cdot\frac{2\pi}{a}+b\right) \\ &= \sin(ax+2\pi+b)=\sin(ax+b) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

故に $\dfrac{2\pi}{a}$ は関数 $f(x)=\sin(ax+b)$ の周期です． $a>0$ のとき，$\dfrac{2\pi}{a}$ が関数 $\sin(ax+b)$ の基本周期です． $a<0$ のとき，$\dfrac{2\pi}{a}<0$ なので，$-\dfrac{2\pi}{a}$ が関数 $\sin(ax+b)$ の基本周期です． このようにして次の定理が成り立ちます．

> **定理 10.5.1**　定数 a と b とは実数で $a\neq 0$ とする． 変数 x の関数 $\sin(ax+b)$ 及び関数 $\cos(ax+b)$ は周期関数であり，その基本周期は $\dfrac{2\pi}{|a|}$ である． また，関数 $\tan(ax+b)$ は周期関数であり，その基本周期は $\dfrac{\pi}{|a|}$ である．

例　変数 x の関数 $\sin\dfrac{4-7x}{3}=\sin\left(-\dfrac{7}{3}x+\dfrac{4}{3}\right)$ の基本周期は

$$\frac{2\pi}{\left|-\frac{7}{3}\right|}=\frac{2\pi}{\frac{7}{3}}=\frac{6\pi}{7}\ .$$

終

例　変数 x の関数 $\cos\dfrac{\pi(3x-2)}{5}=\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}x-\dfrac{2\pi}{5}\right)$ の基本周期は

$$\frac{2\pi}{\left|\frac{3\pi}{5}\right|}=\frac{2\pi}{\frac{3\pi}{5}}=\frac{10\pi}{3\pi}=\frac{10}{3}\ .$$

終

例　変数 x の関数 $\tan\dfrac{5x-8}{7}=\tan\left(\dfrac{5}{7}x-\dfrac{8}{7}\right)$ の基本周期は

$$\frac{\pi}{\left|\frac{5}{7}\right|}=\frac{\pi}{\frac{5}{7}}=\frac{7\pi}{5}\ .$$

終

周期関数と 1 次関数との合成関数の基本周期は次のようになります．

> **定理 10.5.2**　定数 A と B とは実数で $A\neq 0$ とする． 周期関数 $f(x)$ の基本周期が p であるとき，合成関数 $Af(x)+B$ も周期関数でその基本周期は p である．

証明　関数 $g(x)$ を $g(x)=Af(x)+B$ と定める． 実数 p が関数 $f(x)$ の周期であるとき，定義域の各実数 x について，$f(x+p)=f(x)$ なので

$$g(x+p)=Af(x+p)+B=Af(x)+B=g(x)\ ,$$

よって p は $g(x)$ の周期である． $g(x)=Af(x)+B$ より $f(x)=\dfrac{g(x)-B}{A}$． 定数 p が $g(x)$ の周期であるとき，定義域の各実数 x について，$g(x+p)=g(x)$ なので

$$f(x+p)=\frac{g(x+p)-B}{A}=\frac{g(x)-B}{A}=f(x)\ ,$$

よって p は $f(x)$ の周期である． このように，実数 p について，$f(x)$ の周期であることと $g(x)=Af(x)+B$ の周期であることとは同値である． 従って，関数 $f(x)$ の周期である実数の全体と関数 $Af(x)+B$ の周期である実数の全体とは一致する． 故に関数 $f(x)$ の基本周期は関数 $Af(x)+B$ の基本周期である．　（証明終り）

例　変数 x の関数 $\sin\dfrac{\pi(5x+2)}{3}=\sin\left(\dfrac{5\pi}{3}x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ の基本周期は

$$\frac{2\pi}{\left|\frac{5\pi}{3}\right|}=\frac{2\pi}{\frac{5\pi}{3}}=\frac{6}{5}\ .$$

従って関数 $\dfrac{8}{7}\sin\dfrac{\pi(5x+2)}{3}+4$ の基本周期も $\dfrac{6}{5}$．　終

例　変数 x の関数 $\tan\dfrac{3x-4}{7}=\tan\left(\dfrac{3}{7}x+\dfrac{4}{7}\right)$ の基本周期は

$$\frac{\pi}{\left|\frac{3}{7}\right|}=\frac{\pi}{\frac{3}{7}}=\frac{7\pi}{3}\ .$$

従って関数 $\dfrac{9}{2}\tan\dfrac{3x-4}{7}+5$ の基本周期も $\dfrac{7\pi}{3}$．　終

問題 10.5　以下の変数 x の関数の基本周期を求めなさい．

(1) 関数 $7\cos\dfrac{8-5x}{3}+4$． (2) 関数 $7-4\sin\dfrac{\pi(6x-1)}{5}$． (3) 関数 $\dfrac{2}{5}\tan\dfrac{\pi(3x+5)}{4}$．