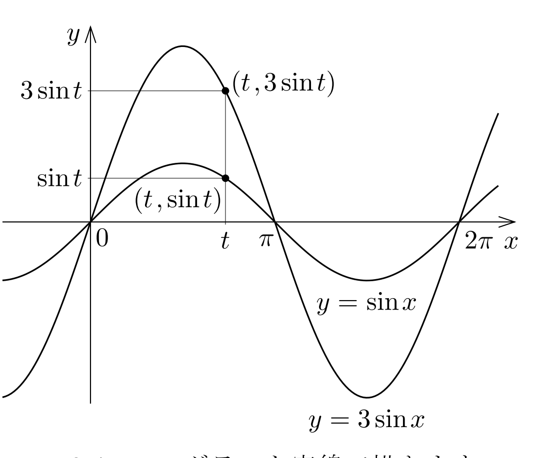
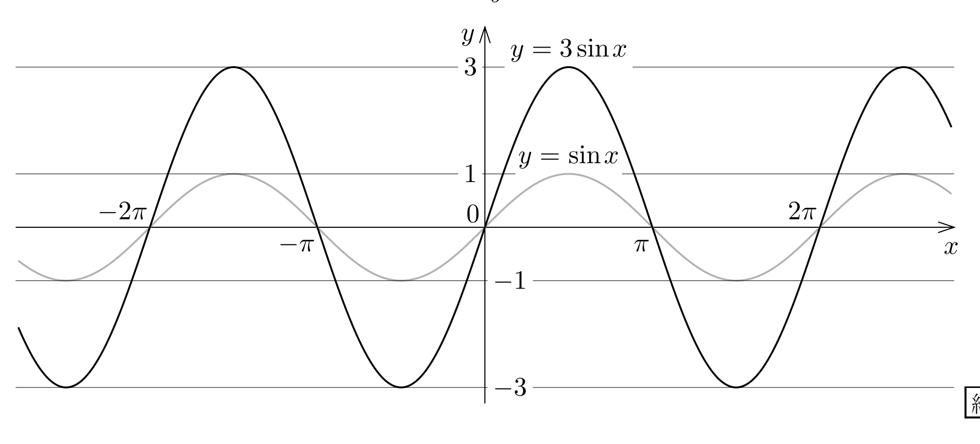
§10.6　正弦関数・余弦関数を含む合成関数のグラフ

1 次関数と三角関数との合成関数のグラフを考えます.



例解　xy 座標平面において変数 x の関数 $y=3\sin x$ のグラフを考えます. 各実数 t に対して, 関数 $y=3\sin x$ のグラフの点 $(t,3\sin t)$ は関数 $y=\sin x$ のグラフの点 $(t,\sin t)$ の y 座標だけを 3 倍にした点です. よって, $y=3\sin x$ のグラフは $y=\sin x$ のグラフの各点の y 座標だけを 3 倍した点の全体です. 関数 $y=\sin x$ のグラフを網掛けの線で, 関数 $y=3\sin x$ のグラフを実線で描きます.



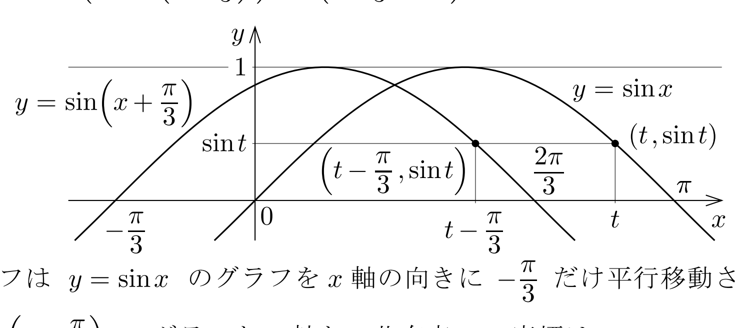
終

問題 10.6.1　xy 座標平面において, 余弦関数 $y=\cos x$ のグラフと対比して関数 $y=3\cos x$ のグラフを描きなさい.

例解　xy 座標平面において変数 x の関数 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフを考えます. 変数 t を $t=x+\dfrac{\pi}{3}$ とおきます. このとき $x=t-\dfrac{\pi}{3}$. 関数 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフの各点 (x,y) は

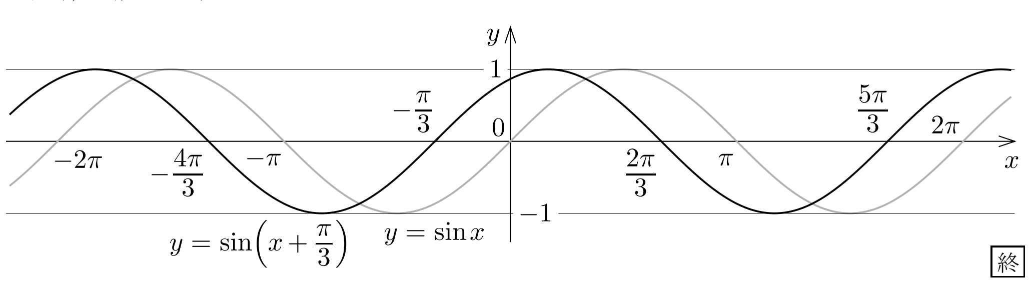
$$(x,y)=\left(x,\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)=\left(t-\frac{\pi}{3},\sin t\right)\ ;$$

この点は関数 $y=\sin x$ のグラフの点 $(t,\sin t)$ を x 軸の向きに $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ平行移動させた点です. よって, $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフは $y=\sin x$ のグラフを x 軸の向きに $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ平行移動させた曲線です. $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は, $y=\sin x$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標 $0,\pm\pi,\pm2\pi$ などに $-\dfrac{\pi}{3}$ を加えた実数なので,



$$-\frac{\pi}{3}\ ,\quad \pi-\frac{\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3}\ ,\quad -\pi-\frac{\pi}{3}=-\frac{4\pi}{3}\ ,\quad 2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}\ ,\quad -2\pi-\frac{\pi}{3}=-\frac{7\pi}{3}$$

などです. 関数 $y=\sin x$ のグラフを網掛けの線で, 関数 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフを実線で描きます.



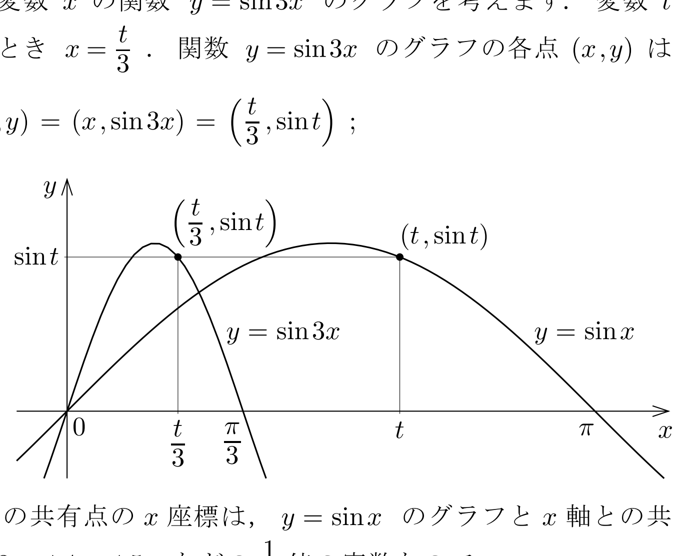
終

問題 10.6.2　xy 座標平面において, 余弦関数 $y=\cos x$ のグラフと対比して関数 $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフを描きなさい.

例解　xy 座標平面において変数 x の関数 $y=\sin 3x$ のグラフを考えます. 変数 t を $t=3x$ とおきます. このとき $x=\dfrac{t}{3}$. 関数 $y=\sin 3x$ のグラフの各点 (x,y) は

$$(x,y)=(x,\sin 3x)=\left(\frac{t}{3},\sin t\right)\ ;$$

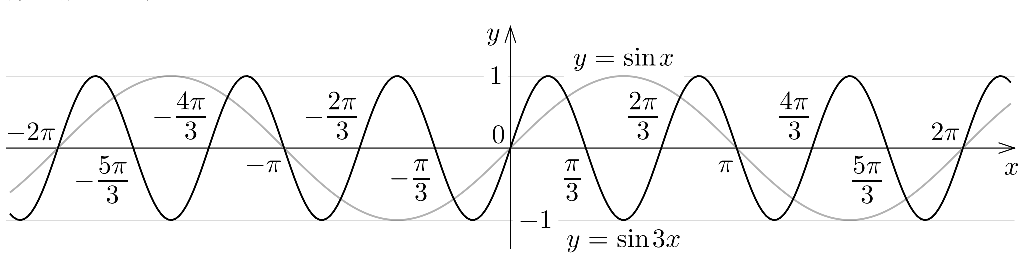
この点は関数 $y=\sin x$ のグラフの点 $(t,\sin t)$ の x 座標だけを $\dfrac{1}{3}$ 倍にした点です. よって, $y=\sin 3x$ のグラフは $y=\sin x$ のグラフの各点の x 座標だけを $\dfrac{1}{3}$ 倍した点の全体です.



$y=\sin 3x$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は, $y=\sin x$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標 $0,\pm\pi,\pm2\pi,\pm3\pi,\pm4\pi,\pm5\pi$ などの $\dfrac{1}{3}$ 倍の実数なので,

$$0,\ \pm\frac{\pi}{3},\ \pm\frac{2\pi}{3},\ \pm\pi,\ \pm\frac{4\pi}{3},\ \pm\frac{5\pi}{3},\ \pm2\pi$$

などです. 関数 $y=\sin x$ のグラフを網掛けの線で, 関数 $y=\sin 3x$ のグラフを実線で描きます.



関数 $\sin 3x$ の基本周期は $\dfrac{2\pi}{3}$ です ; これは $y=\sin 3x$ のグラフの波一つ分の長さです.

終

このように, 0 でない定数 a に対して, 関数 $y=\sin(ax)$ のグラフは関数 $y=\sin x$ のグラフの各点の x 座標だけを $\dfrac{1}{a}$ 倍した点の全体です.

問題 10.6.3　xy 座標平面において, 余弦関数 $y=\cos x$ のグラフと対比して関数 $y=\cos 3x$ のグラフを描きなさい.

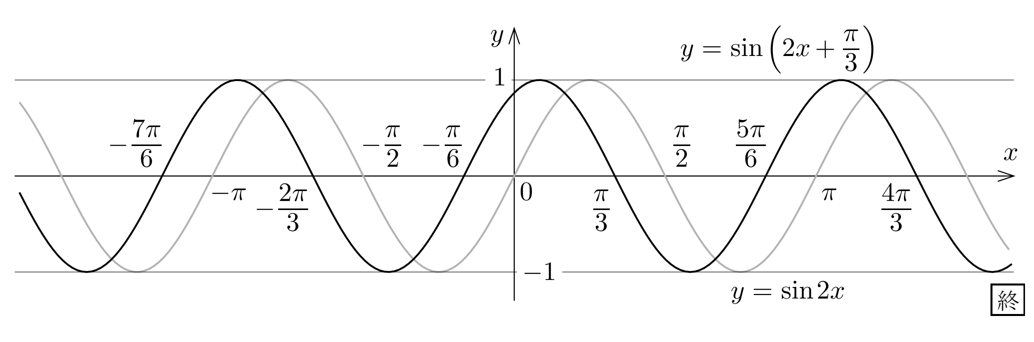
例解　xy 座標平面において変数 x の関数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフを考えます. 変数 t を $t=2x+\dfrac{\pi}{3}$ とおきます. $2x=t-\dfrac{\pi}{3}$ なので $x=\dfrac{t}{2}-\dfrac{\pi}{6}$. 関数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフの各点 (x,y) は

$$(x,y)=\left(x,\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right)=\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{6},\sin t\right)\ ;$$

この点は関数 $y=\sin x$ のグラフの点 $(t,\sin t)$ の x 座標だけ $\dfrac{1}{2}$ 倍して $-\dfrac{\pi}{6}$ を加えた点です. 従って, $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフは, $y=\sin x$ のグラフの各点について x 座標だけ $\dfrac{1}{2}$ 倍して $-\dfrac{\pi}{6}$ だけ x 軸の向きに平行移動させた曲線です. $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は, $y=\sin x$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標 $0,\pm\pi,\pm2\pi$ などを $\dfrac{1}{2}$ 倍して $-\dfrac{\pi}{6}$ を加えた実数

$$\frac{0}{2}-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{-\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=-\frac{2\pi}{3}\ ,\ \frac{2\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}\ ,\ \frac{-2\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=-\frac{7\pi}{6}$$

などです. これらの実数の間隔は基本周期 π の $\dfrac{1}{2}$ 倍の $\dfrac{\pi}{2}$ です. 関数 $y=\sin 2x$ のグラフを網掛けの線で, 関数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフを実線で描きます.



終

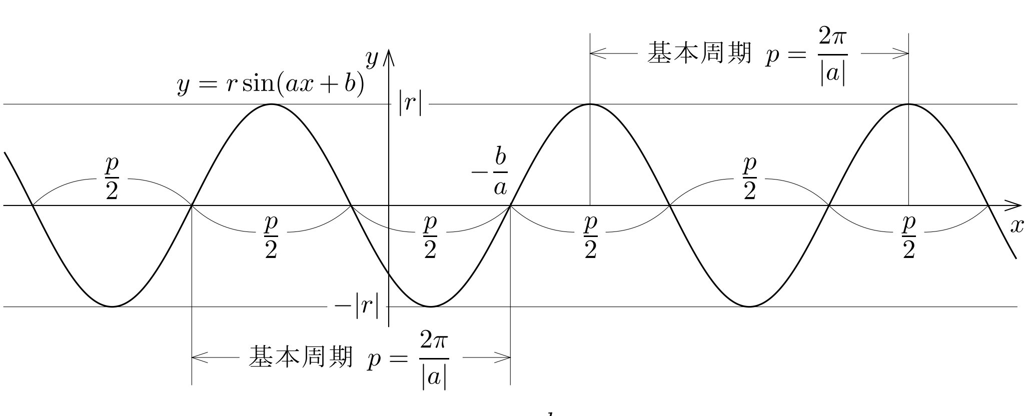
定数 r と a と b とは実数で $a\neq0$ とします. xy 座標平面において変数 x の関数 $y=r\sin(ax+b)$ のグラフを考えます. 変数 t を $t=ax+b$ とおきます. $ax=t-b$ なので $x=\dfrac{t}{a}-\dfrac{b}{a}$. $y=r\sin(ax+b)$ のグラフの各点 (x,y) は

$$(x,y)=\big(x,r\sin(ax+b)\big)=\left(\frac{t}{a}-\frac{b}{a},r\sin t\right)\ ;$$

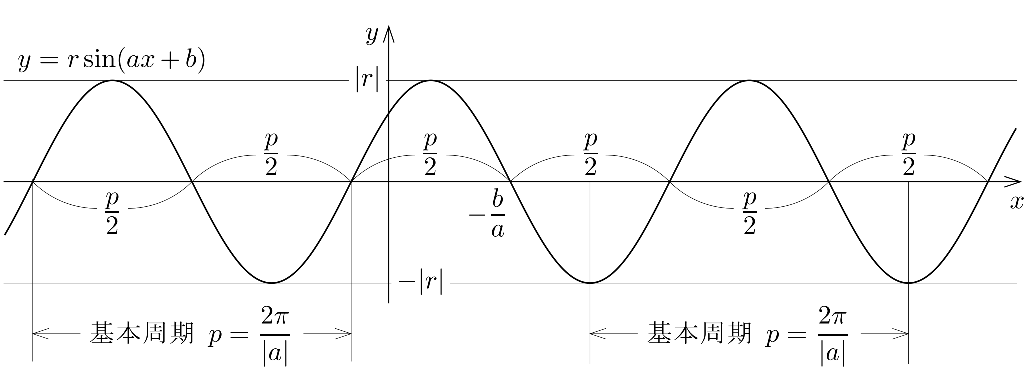
この点は関数 $y=r\sin x$ のグラフの点 $(t,r\sin t)$ の x 座標だけ $\dfrac{1}{a}$ 倍して $-\dfrac{b}{a}$ を加えた点です. 従って, $y=r\sin(ax+b)$ のグラフは, $y=r\sin x$ のグラフで各点の x 座標だけ $\dfrac{1}{a}$ 倍した曲線を x 軸の向きに $-\dfrac{b}{a}$ だけ平行移動させた曲線です. $y=\sin(ax+b)$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は, $y=\sin x$ のグラフと x 軸との共有点の座標 $0,\pm\pi,\pm2\pi,\pm3\pi$ などを $\dfrac{1}{a}$ 倍して $-\dfrac{b}{a}$ を加えた実数

$$\frac{0}{a}-\frac{b}{a}=-\frac{b}{a}\ ,\ \frac{\pm\pi}{a}-\frac{b}{a}=-\frac{b}{a}\pm\frac{\pi}{a}\ ,\ \frac{\pm2\pi}{a}-\frac{b}{a}=-\frac{b}{a}\pm\frac{2\pi}{a}\ ,\ \frac{\pm3\pi}{a}-\frac{b}{a}=-\frac{b}{a}\pm\frac{3\pi}{a}$$

などです. これらの実数の間隔は基本周期 $p=\dfrac{2\pi}{|a|}$ の $\dfrac{1}{2}$ 倍の $\dfrac{p}{2}=\dfrac{\pi}{|a|}$ です. $ar>0$ のとき, 関数 $y=r\sin(ax+b)$ は $-\dfrac{b}{a}$ の付近で単調増加であり, そのグラフは次のようになります.



$ar<0$ のとき, 関数 $y=r\sin(ax+b)$ は $-\dfrac{b}{a}$ の付近で単調減少であり, そのグラフは次のようになります.



例題　xy 座標平面において関数 $y=4\sin\dfrac{2x-\pi}{3}$ のグラフを考える.

(1) 関数 $y=4\sin\dfrac{2x-\pi}{3}$ の基本周期を求める.

(2) 関数 $y=4\sin\dfrac{2x-\pi}{3}$ のグラフと x 軸との共有点の幾つかの x 座標を求める.

(3) 関数 $y=4\sin\dfrac{2x-\pi}{3}$ のグラフを描く.

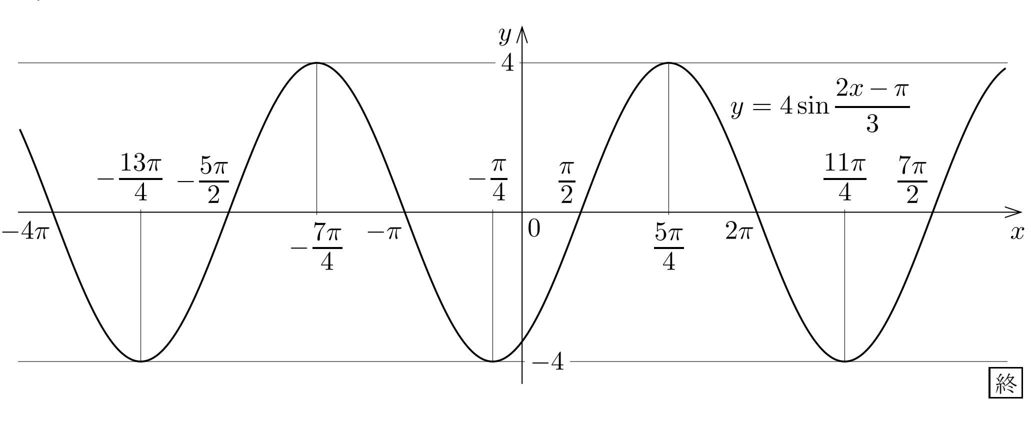
〔解説〕

(1) 関数 $y=4\sin\dfrac{2x-\pi}{3}$ の基本周期は $2\pi\div\left|\dfrac{2}{3}\right|=3\pi$ である.

(2) 正弦関数 $y=\sin x$ について, $x=0$ のとき $y=\sin x=\sin 0=0$. 関数 $y=4\sin\dfrac{2x-\pi}{3}$ について, $\dfrac{2x-\pi}{3}=0$ のときつまり $x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき $y=4\sin\dfrac{2x-\pi}{3}=4\sin 0=0$. 基本周期が 3π なので, 関数 $y=4\sin\dfrac{2x-\pi}{3}$ のグラフと x 軸との共有点の幾つかの x 座標は,

$$\frac{\pi}{2}\ ,\quad \frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2}=-\pi\ ,\quad \frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}=2\pi\ ,\quad \frac{\pi}{2}-3\pi=-\frac{5\pi}{2}\ ,\quad \frac{\pi}{2}+3\pi=\frac{7\pi}{2}\ .$$

(3) 関数 $\dfrac{2x-\pi}{3}$ は単調増加で, 関数 $4\sin x$ は 0 の付近で単調増加なので, 関数 $4\sin\dfrac{2x-\pi}{3}$ は $\dfrac{\pi}{2}$ の付近で単調増加である. 関数 $y=4\sin\dfrac{2x-\pi}{3}$ のグラフは次のようになる.



終

問題 10.6.4　xy 座標平面において関数 $y=2\sin\dfrac{4x+2\pi}{3}$ のグラフを考えます.

(1) 関数 $y=2\sin\dfrac{4x+2\pi}{3}$ の基本周期を求めなさい.

(2) 関数 $y=2\sin\dfrac{4x+2\pi}{3}$ のグラフと x 軸との共有点の幾つかの x 座標を求めなさい.

(3) 関数 $y=2\sin\dfrac{4x+2\pi}{3}$ のグラフを描きなさい.

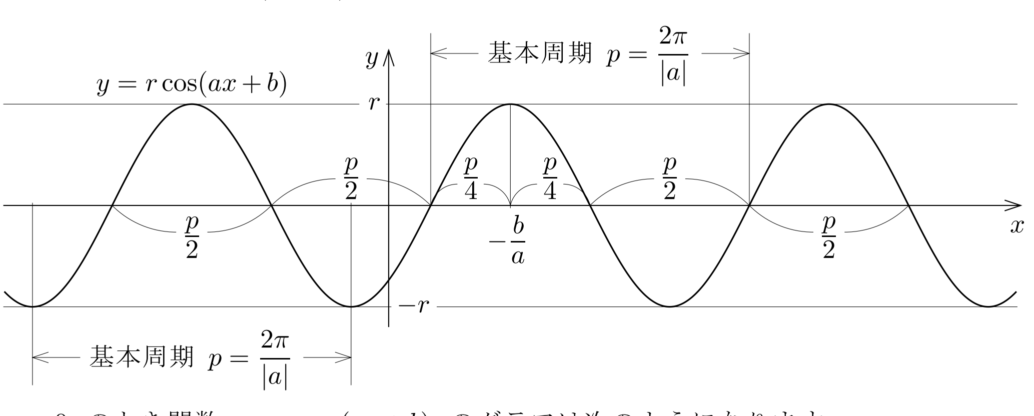
定数 r と a と b とは実数で $a\neq0$ とします. xy 座標平面において変数 x の関数 $y=r\cos(ax+b)$ のグラフを考えます. 変数 t を $t=ax+b$ とおきます. $ax=t-b$ なので $x=\dfrac{t}{a}-\dfrac{b}{a}$. 関数 $y=r\cos(ax+b)$ のグラフの各点 (x,y) は

$$(x,y)=\big(x,r\cos(ax+b)\big)=\left(\frac{t}{a}-\frac{b}{a},r\cos t\right)\ ;$$

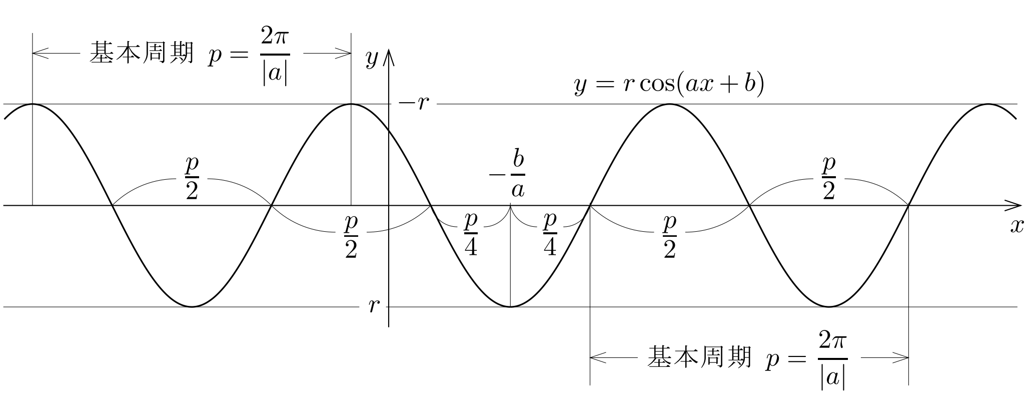
これは関数 $y=r\cos x$ のグラフの点 $(t,r\cos t)$ の x 座標だけ $\dfrac{1}{a}$ 倍して $-\dfrac{b}{a}$ を加えた点です. 従って, $y=r\cos(ax+b)$ のグラフは, $y=r\cos x$ のグラフで各点の x 座標だけ $\dfrac{1}{a}$ 倍した曲線を x 軸の向きに $-\dfrac{b}{a}$ だけ平行移動させた曲線です. $y=\cos(ax+b)$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は, $y=\cos x$ のグラフと x 軸との共有点の座標 $\pm\dfrac{\pi}{2},\pm\dfrac{3\pi}{2},\pm\dfrac{5\pi}{2}$ などを $\dfrac{1}{a}$ 倍して $-\dfrac{b}{a}$ を加えた実数

$$\pm\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{a}-\frac{b}{a}=-\frac{b}{a}\pm\frac{\pi}{2a}\ ,\ \pm\frac{3\pi}{2}\cdot\frac{1}{a}-\frac{b}{a}=-\frac{b}{a}\pm\frac{3\pi}{2a}\ ,\ \pm\frac{5\pi}{2}\cdot\frac{1}{a}-\frac{b}{a}=-\frac{b}{a}\pm\frac{5\pi}{2a}$$

などです. これらの実数の間隔は基本周期 $p=\dfrac{2\pi}{|a|}$ の $\dfrac{1}{2}$ 倍の $\dfrac{p}{2}=\dfrac{\pi}{|a|}$ です. $r>0$ のとき関数 $y=r\cos(ax+b)$ のグラフは次のようになります.



$r<0$ のとき関数 $y=r\cos(ax+b)$ のグラフは次のようになります.



例題　xy 座標平面において関数 $y=2\cos\dfrac{3x+\pi}{4}$ のグラフを考える.

(1) 関数 $y=2\cos\dfrac{3x+\pi}{4}$ の基本周期を求める.

(2) 関数 $y=2\cos\dfrac{3x+\pi}{4}$ のグラフと x 軸との共有点の幾つかの x 座標を求める.

(3) 関数 $y=2\cos\dfrac{3x+\pi}{4}$ のグラフを描く.

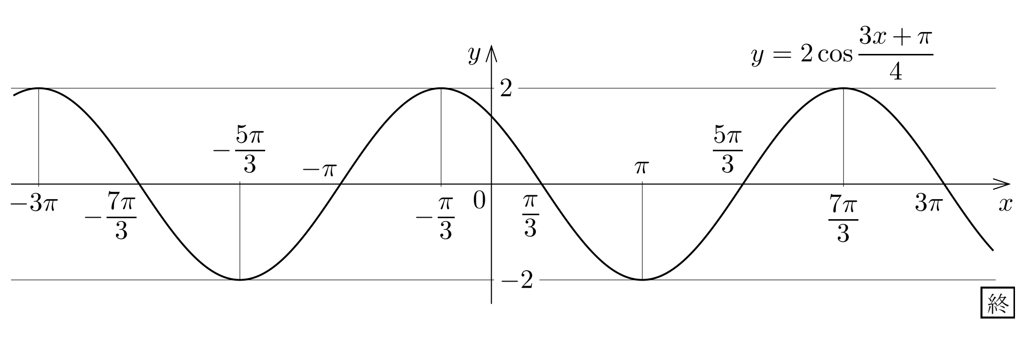
〔解説〕

(1) 関数 $y=2\cos\dfrac{3x+\pi}{4}$ の基本周期は $2\pi\div\left|\dfrac{3}{4}\right|=\dfrac{8\pi}{3}$ である.

(2) 余弦関数 $y=\cos x$ について, $x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき $y=\cos x=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$. 関数 $y=2\cos\dfrac{3x+\pi}{4}$ について, $\dfrac{3x+\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ のときつまり $x=\dfrac{\pi}{3}$ のとき $y=2\cos\dfrac{3x+\pi}{4}=4\cos\dfrac{\pi}{2}=0$. 基本周期が $\dfrac{8\pi}{3}$ なので, 関数 $y=2\cos\dfrac{3x+\pi}{4}$ のグラフと x 軸との共有点の幾つかの x 座標は,

$$\frac{\pi}{3}\ ,\quad \frac{\pi}{3}-\frac{4\pi}{3}=-\pi\ ,\quad \frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}\ ,\quad \frac{\pi}{3}-\frac{8\pi}{3}=-\frac{7\pi}{3}\ ,\quad \frac{\pi}{3}+\frac{8\pi}{3}=3\pi\ .$$

(3) 関数 $\dfrac{3x+\pi}{4}$ は単調増加で, 関数 $2\cos x$ は 0 の付近で単調減少なので, 関数 $2\sin\dfrac{3x+\pi}{4}$ は $\dfrac{\pi}{3}$ の付近で単調減少である. 関数 $y=2\cos\dfrac{3x+\pi}{4}$ のグラフは次のようになる.



終

問題 10.6.5　xy 座標平面において関数 $y=4\cos\dfrac{2x-\pi}{3}$ のグラフを考えます.

(1) 関数 $y=4\cos\dfrac{2x-\pi}{3}$ の基本周期を求めなさい.

(2) 関数 $y=4\cos\dfrac{2x-\pi}{3}$ のグラフと x 軸との共有点の幾つかの x 座標を求めなさい.

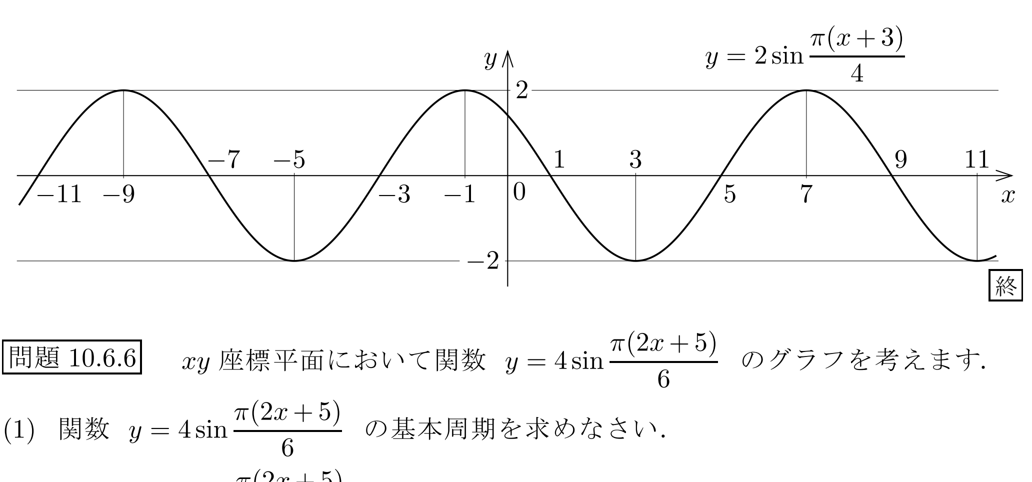
(3) 関数 $y=4\cos\dfrac{2x-\pi}{3}$ のグラフを描きなさい.

例題　xy 座標平面において関数 $y=2\sin\dfrac{\pi(x+3)}{4}$ のグラフを描く.

〔解説〕　関数 $y=2\sin\dfrac{\pi(x+3)}{4}$ の基本周期は $2\pi\div\dfrac{\pi}{4}=8$ である. 関数 $y=2\sin\dfrac{\pi(x+3)}{4}$ について, $\dfrac{\pi(x+3)}{4}=0$ のときつまり $x=-3$ のとき $y=2\sin\dfrac{\pi(x+3)}{4}=4\sin 0=0$. 基本周期が 8 なので, 関数 $y=2\sin\dfrac{\pi(x+3)}{4}$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は,

$$-3\ ,\quad -3+4=1\ ,\quad -3-4=-7\quad -3+8=5\ ,\quad -3-8=-11\ .$$

などである. 関数 $\dfrac{\pi(x+3)}{4}$ は単調増加であり, 関数 $2\sin x$ は 0 の付近で単調増加であるので, 関数 $2\sin\dfrac{\pi(x+3)}{4}$ は -3 の付近で単調増加である. xy 座標平面において関数 $y=2\sin\dfrac{\pi(x+3)}{4}$ のグラフは次のようになる.



終

問題 10.6.6　xy 座標平面において関数 $y=4\sin\dfrac{\pi(2x+5)}{6}$ のグラフを考えます.

(1) 関数 $y=4\sin\dfrac{\pi(2x+5)}{6}$ の基本周期を求めなさい.

(2) 関数 $y=4\sin\dfrac{\pi(2x+5)}{6}$ のグラフと x 軸との共有点の幾つかの x 座標を求めなさい.

(3) 関数 $y=4\sin\dfrac{\pi(2x+5)}{6}$ のグラフを描きなさい.

問題 10.6.7　xy 座標平面において関数 $y=-3\cos\dfrac{\pi(x-2)}{5}$ のグラフを考えます.

(1) 関数 $y=-3\cos\dfrac{\pi(x-2)}{5}$ の基本周期を求めなさい.

(2) 関数 $y=-3\cos\dfrac{\pi(x-2)}{5}$ のグラフと x 軸との共有点の幾つかの x 座標を求めなさい.

(3) 関数 $y=-3\cos\dfrac{\pi(x-2)}{5}$ のグラフを描きなさい.