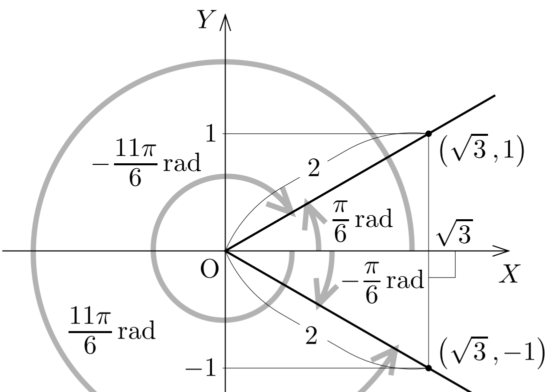
§10.7　三角関数が現れる方程式・不等式

$\boxed{\text{例解}}$ 変数 x に関する方程式 $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ の解を，絶対値が小さい方から 4 個求めます． XY 座標平面において，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する角度 $x$rad の動径に属す点 $\mathrm{P}=(a,b)$ （ $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ ）をとり， $r=\overline{\mathrm{OP}}$ とおきます．

$$\frac{a}{r}=\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,$$
$$a:r=\sqrt{3}:2\ .$$

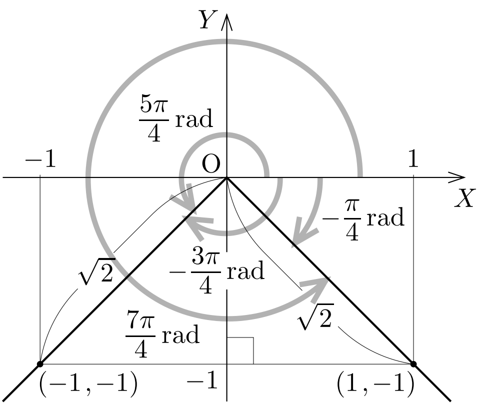


$r>0$ なので $a>0$ ． $r=\overline{\mathrm{OP}}=2$ のとき， $a=\sqrt{3}$ ， $b^2=r^2-a^2=1$ なので $b=\pm1$ ． 始線 OX に対する線分 OP の角度を絶対値が小さい方から 4 個挙げると， $\frac{\pi}{6}$rad と $-\frac{\pi}{6}$rad と $\frac{11\pi}{6}$rad と $-\frac{11\pi}{6}$rad です． 従って $x=\frac{\pi}{6},-\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6},-\frac{11\pi}{6}$ ．

終

$\boxed{\text{例解}}$ 変数 x に関する方程式 $\sin x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ の解を，絶対値が小さい方から 4 個求めます． XY 座標平面において，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する角度 $x$rad の動径に属す点 $\mathrm{P}=(a,b)$ （ $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ ）をとり， $r=\overline{\mathrm{OP}}$ とおきます．

$$\frac{b}{r}=\sin x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,$$
$$b:r=-1:\sqrt{2}\ .$$



$r>0$ なので $b<0$ ． $r=\sqrt{2}$ のとき， $b=-1$ ， $a^2=r^2-b^2=1$ なので $a=\pm1$ ． 始線 OX に対する線分 OP の角度を絶対値が小さい方から 4 個挙げると， $-\frac{\pi}{4}$rad と $-\frac{3\pi}{4}$rad と $\frac{5\pi}{4}$rad と $\frac{7\pi}{5}$rad です． 従って $x=-\frac{\pi}{4},-\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{5},\frac{7\pi}{4}$ ．

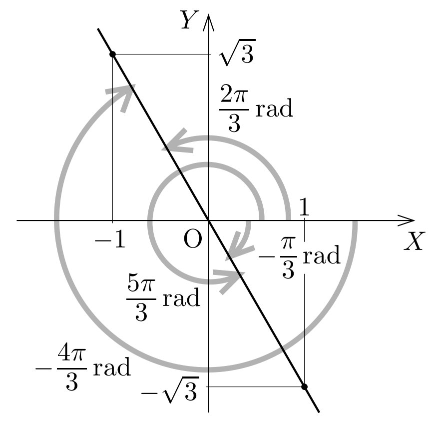
終

$\boxed{\text{問題 10.7.1}}$ 変数 x に関する方程式 $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ の解を，絶対値が小さい方から 4 個求めなさい．

$\boxed{\text{問題 10.7.2}}$ 変数 x に関する方程式 $\cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ の解を，絶対値が小さい方から 4 個求めなさい．

$\boxed{\text{例解}}$ 変数 x に関する方程式 $\tan x=-\sqrt{3}$ の解を，絶対値が小さい方から 4 個求めます． XY 座標平面において，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する角度 $x$rad の動径に属す点 $\mathrm{P}=(a,b)$ （ $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ ）をとると，

$$\frac{b}{a}=\tan x=-\sqrt{3}\ ,$$
$$b=-\sqrt{3}\,a\ ,$$



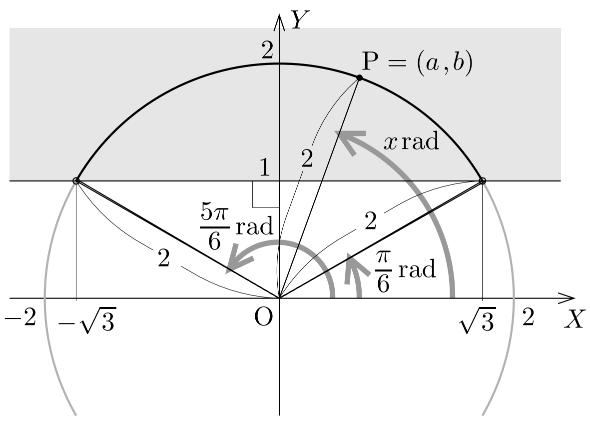
よって点 $\mathrm{P}=(a,b)$ は原点 O を通る傾きが $-\sqrt{3}$ の直線に属します． 始線 OX に対する線分 OP の角度を絶対値が小さい方から 4 個挙げると，右図のように， $-\frac{\pi}{3}$rad と $\frac{2\pi}{3}$rad と $-\frac{4\pi}{3}$rad と $\frac{5\pi}{3}$rad です． 従って $x=-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},-\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$ ．

終

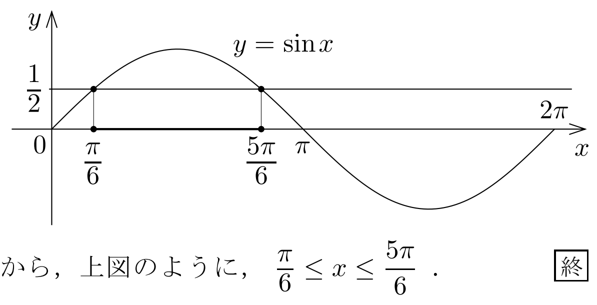
$\boxed{\text{問題 10.7.3}}$ 変数 x に関する方程式 $\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ の解を，絶対値が小さい方から 4 個求めなさい．

$\boxed{\text{例解}}$ 変数 x について $0\leq x\leq 2\pi$ の範囲で不等式 $\sin x\geq\frac{1}{2}$ を解きます． XY 座標平面において，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する角度 $x$rad の動径に属す点 $\mathrm{P}=(a,b)$ （ $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ ）をとり， $r=\overline{\mathrm{OP}}>0$ とおきます．

$$\frac{b}{r}=\sin x\geq\frac{1}{2}\ ,$$
$$b\geq\frac{r}{2}\ .$$



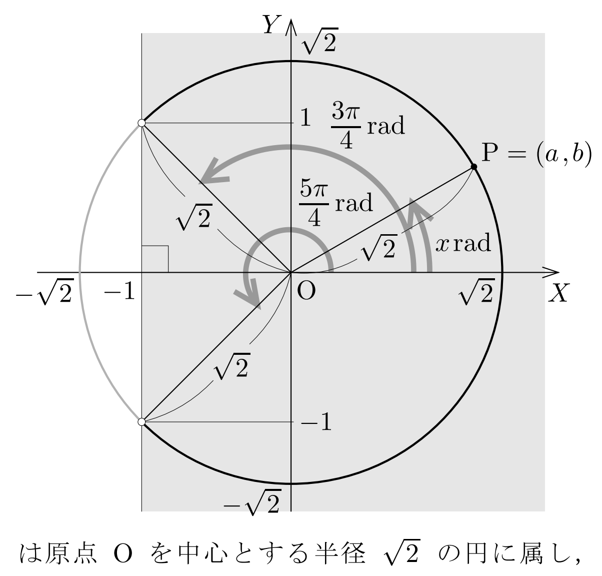
$\overline{\mathrm{OP}}=r=2$ のとき， $\mathrm{P}=(a,b)$ は原点 O を中心とする半径 2 の円に属し， $b\geq\frac{r}{2}=1$ ． 始線 OX に対する線分 OP の角度 $x$rad は，右図のように， $\frac{\pi}{6}$rad 以上 $\frac{5\pi}{6}$rad 以下なので， $\frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{5\pi}{6}$ ． このことを xy 座標平面におけるグラフで考えます． $\sin x\geq\frac{1}{2}$ となる x の値の範囲は，関数 $y=\sin x$ のグラフが関数 $y=\frac{1}{2}$ のグラフの上側（グラフの共有点を含める）にあるような x 座標の範囲ですから，上図のように， $\frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{5\pi}{6}$ ．



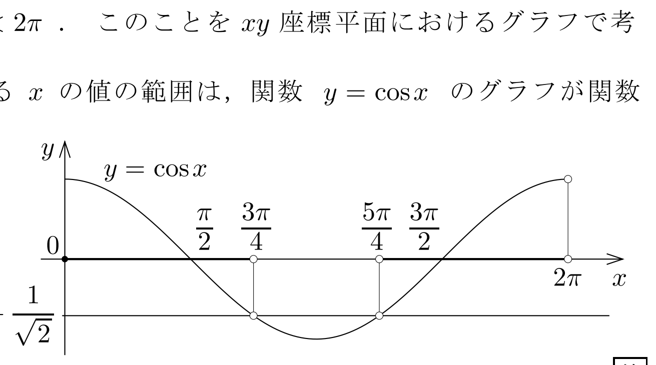
終

$\boxed{\text{例解}}$ 変数 x について $0\leq x<2\pi$ の範囲で不等式 $\cos x>-\frac{1}{\sqrt{2}}$ を解きます． XY 座標平面において，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する角度 $x$rad の動径に属す点 $\mathrm{P}=(a,b)$ （ $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ ）をとり， $r=\overline{\mathrm{OP}}>0$ とおきます．

$$\frac{a}{r}=\cos x>-\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,$$
$$a>-\frac{r}{\sqrt{2}}\ .$$



$\overline{\mathrm{OP}}=r=\sqrt{2}$ のとき， $\mathrm{P}=(a,b)$ は原点 O を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円に属し， $a\geq-\frac{r}{\sqrt{2}}=-1$ ． 始線 OX に対する線分 OP の角度 $x$rad は，上図のように， $0\leq x<\frac{3\pi}{4}$ または $\frac{5\pi}{4}<x<2\pi$ ． このことを xy 座標平面におけるグラフで考えます． $\cos x>-\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる x の値の範囲は，関数 $y=\cos x$ のグラフが関数 $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ のグラフの上側（グラフの共有点を含めない）にあるような x 座標の範囲ですから， $0\leq x<\frac{3\pi}{4}$ または $\frac{5\pi}{4}<x<2\pi$ ．



終

$\boxed{\text{問題 10.7.4}}$ 変数 x について $0\leq x<2\pi$ の範囲で不等式 $\sin x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ を解きなさい．

$\boxed{\text{問題 10.7.5}}$ 変数 x について $0\leq x<2\pi$ の範囲で不等式 $\cos x\geq\frac{1}{2}$ を解きなさい．

$\boxed{\text{問題 10.7.6}}$ 変数 x について $-\pi<x\leq\pi$ の範囲で不等式 $\sin x>-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を解きなさい．