§10.8　三角関数の相互関係

例えば，$(\sin x)^2$ を $\sin^2 x$ のように，$(\cos t)^3$ を $\cos^3 t$ のように略します：

$$\sin^2 x = (\sin x)^2\ , \qquad \cos^3 t = (\cos t)^3\ .$$

$\sin^2 x = (\sin x)^2$ と $\sin x^2 = \sin(x^2)$ とは違います．また，このような略記法が使われるのは $\sin x$ や $\cos t$ などの累乗の指数が正の整数のときに限ります．$(\sin x)^{-2}$ を $\sin^{-2} x$ と略すようなことはしません．

任意の実数 x について，定理6.4.2より

$$\{\sin(x\mathrm{rad})\}^2 + \{\cos(x\mathrm{rad})\}^2 = 1\ ;$$

$\sin(x\mathrm{rad}) = \sin x$ ，$\cos(x\mathrm{rad}) = \cos x$ なので，$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ ．

定理 10.8.1　任意の実数 x について

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1\ .$$

定理6.4.3を思い起こして下さい：一般角 θ が角度 $90° = \dfrac{\pi}{2}\mathrm{rad}$ の奇数倍でないならば $1 + (\tan\theta)^2 = \dfrac{1}{(\cos\theta)^2}$ ．実数 x について，一般角 $x\mathrm{rad}$ が角度 $\dfrac{\pi}{2}\mathrm{rad}$ の奇数倍でないとき，つまり x が $\dfrac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとき，

$$1 + \{\tan(x\mathrm{rad})\}^2 = \frac{1}{\{\cos(x\mathrm{rad})\}^2}\ ,$$

$\tan(x\mathrm{rad}) = \tan x$ ，$\cos(x\mathrm{rad}) = \cos x$ なので

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\ ,$$

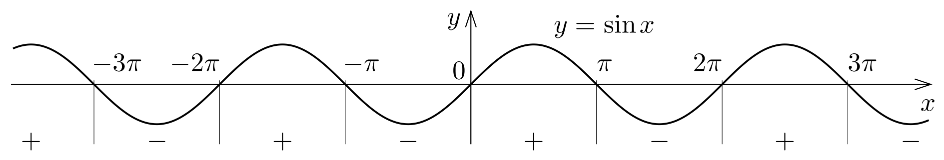
$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ なので $\dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$ ．

定理 10.8.2　任意の実数 x について，

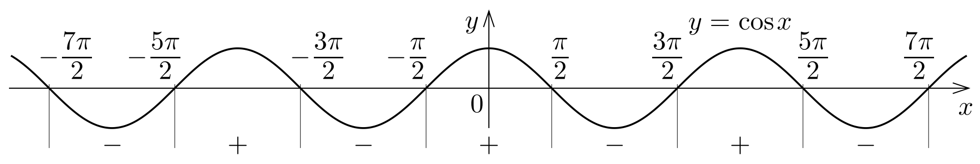
$$x \text{ が } \frac{\pi}{2} \text{ の奇数倍でないとき}\quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x\ .$$

定理10.2.2，定理10.8.1，定理10.8.2を用いると，$\sin^2 x$，$\cos^2 x$，$\tan^2 x$ のうちの1個の値が分かると他の2個の値も分かります．

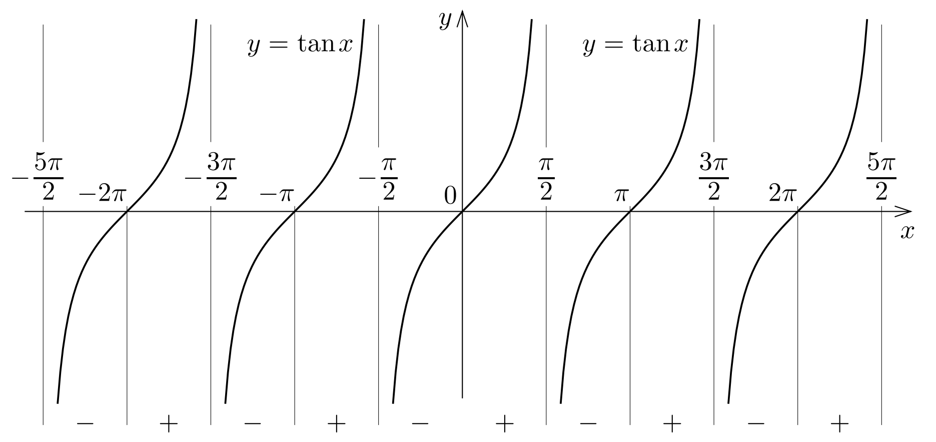
関数 $\sin x$，$\cos x$，$\tan x$ のグラフよりそれらの値の符号は次のようになります．



正弦関数 $y = \sin x$ の値の符号



余弦関数 $y = \cos x$ の値の符号



正接関数 $y = \tan x$ の値の符号

例題　実数 x について $\pi \le x \le 2\pi$ かつ $\cos x = \dfrac{3}{5}$ とする．$\sin x$ の値と $\tan x$ の値とを求める．

〔解説〕 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ なので，$\cos x = \dfrac{3}{5}$ より

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}\ .$$

$\pi \le x \le 2\pi$ より $\sin x \le 0$ なので，

$$\sin x = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}\ .$$

更に

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}\ .$$

終

問題 10.8.1　実数 x について $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ かつ $\sin x = -\dfrac{2}{3}$ とします．$\cos x$ の値と $\tan x$ の値とを求めなさい．

例題　実数 x について $\pi \le x \le 2\pi$ かつ $\tan x = -2$ とする．$\sin x$ の値と $\cos x$ の値とを求める．

〔解説〕 $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ なので，$\tan x = -2$ より

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + (-2)^2} = \frac{1}{5}\ ,$$

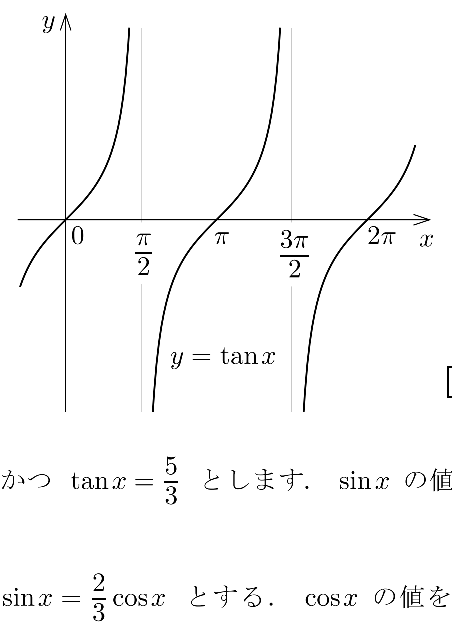
$\pi \le x \le 2\pi$ かつ $\tan x < 0$ なので

$\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ ，よって $\cos x > 0$ なので，

$$\cos x = \sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\ .$$

更に $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ より

$$\sin x = \tan x \cos x = (-2)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$= -\frac{2}{\sqrt{5}}\ .$$



終

問題 10.8.2　実数 x について $\pi \le x \le 2\pi$ かつ $\tan x = \dfrac{5}{3}$ とします．$\sin x$ の値と $\cos x$ の値とを求めなさい．

例題　実数 x について $-\pi \le x \le 0$ かつ $\sin x = \dfrac{2}{3}\cos x$ とする．$\cos x$ の値を求める．

〔解説〕 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ なので，$\sin x = \dfrac{2}{3}\cos x$ より，

$$\left(\frac{2}{3}\cos x\right)^2 + \cos^2 x = 1\ ,$$

$$\frac{13}{9}\cos^2 x = 1\ ,$$

$$\cos^2 x = \frac{9}{13}\ ;$$

$-\pi \le x \le 0$ より $\sin x \le 0$ なので $\dfrac{2}{3}\cos x \le 0$ ，よって $\cos x \le 0$ なので，

$$\cos x = -\sqrt{\frac{9}{13}} = -\frac{3}{\sqrt{13}}\ .$$

終

問題 10.8.3　実数 t について $\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{3\pi}{2}$ かつ $\cos t = \dfrac{3}{4}\sin t$ とします．$\sin t$ の値を求めなさい．