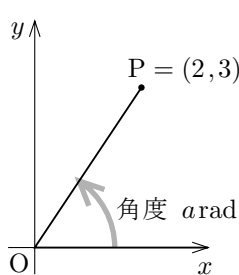


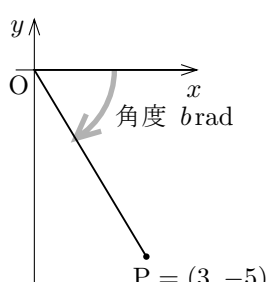
第10章の補遺3 逆三角関数の利用

例題 xy 座標平面における点 $P = (2, 3)$ に対して、原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $a\text{rad}$ (a は実数) とおく. $-\pi < a \leq \pi$ とする. 逆正接関数を用いて a の値を表す.



$\tan a = \frac{3}{2}$ なので $\tan^{-1}(\tan a) = \tan^{-1}\frac{3}{2}$. 点 P の x 座標が正なので, $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$, よって $\tan^{-1}(\tan a) = a$. 故に $a = \tan^{-1}\frac{3}{2}$. 終

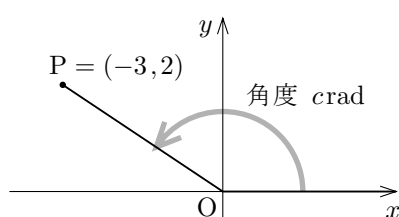
例題 xy 座標平面における点 $P = (3, -5)$ に対して、原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $b\text{rad}$ (b は実数) とおく. $-\pi < b \leq \pi$ とする. 逆正接関数を用いて b の値を表す.



$\tan b = -\frac{5}{3}$ なので $\tan^{-1}(\tan b) = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{3}\right) = -\tan^{-1}\frac{5}{3}$, 点 P の x 座標が正なので, $-\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2}$, よって $\tan^{-1}(\tan b) = b$. 故に $b = -\tan^{-1}\frac{5}{3}$. 終

問題 10.補遺3.1 xy 座標平面における点 $P = (5, -7)$ に対して、原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $a\text{rad}$ (a は実数) とおきます. $-\pi < a \leq \pi$ とします. 逆正接関数を用いて a の値を表しなさい.

例題 xy 座標平面における点 $P = (-3, 2)$ に対して、原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $c\text{rad}$ (c は実数) とおく. $-\pi < c \leq \pi$ とする. 逆正接関数を用いて c の値を表す.



【注意】 逆正接関数 $\tan^{-1}x$ の基本周期は π なので $\tan c = \tan(c - \pi)$.

【解答】 $\tan c = -\frac{2}{3}$ なので

$$\tan^{-1}(\tan c) = \tan^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) = -\tan^{-1}\frac{2}{3}.$$

$\frac{\pi}{2} < c < \frac{3\pi}{2}$ なので $-\frac{\pi}{2} < c - \pi < \frac{\pi}{2}$, よって

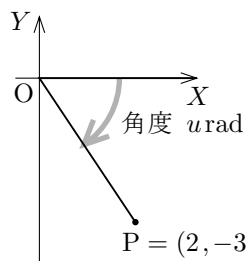
$$\tan^{-1}(\tan c) = \tan^{-1}\{\tan(c - \pi)\} = c - \pi.$$

従って $c - \pi = -\tan^{-1}\frac{2}{3}$ なので, $c = \pi - \tan^{-1}\frac{2}{3}$. 終

問題 10.補遺3.2 xy 座標平面における点 $P = (-4, 3)$ に対して、原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $b\text{rad}$ (b は実数) とおきます. $-\pi < b \leq \pi$ とします. 逆正接関数を用いて b の値を表しなさい.

例題 次のような実数 r, s の組を一つ求める: 任意の実数 x について $2\sin x - 3\cos x = r\sin(x + s)$.

【解説】 XY 座標平面における点 $P = (2, -3)$ に対して、原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\text{rad}$ (u は実数) とおく. $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ としてよい. 定理 10.9.5 より、任意の実数 x について



$$\begin{aligned} 2\sin x - 3\cos x &= \sqrt{2^2 + (-3)^2} \sin(x + u) \\ &= \sqrt{13} \sin(x + u). \end{aligned}$$

$\tan u = -\frac{3}{2}$ なので,

$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right) = -\tan^{-1}\frac{3}{2}.$$

$-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ なので $\tan^{-1}(\tan u) = u$. よって $u = -\tan^{-1}\frac{3}{2}$. 任意の実数 x について

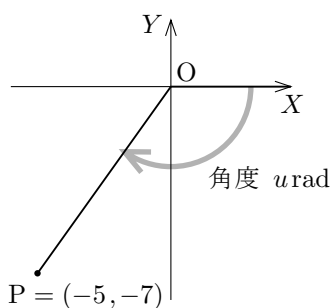
$$2\sin x - 3\cos x = \sqrt{13} \sin\left(x - \tan^{-1}\frac{3}{2}\right).$$

$r = \sqrt{13}$ かつ $s = -\tan^{-1}\frac{3}{2}$ とすればよい. 終

問題 10.補遺3.3 次のような実数 r, s の組を一つ求めなさい: 任意の実数 x について $4\sin x - 3\cos x = r\sin(x + s)$.

例題 次のような実数 r, s の組を一つ求める: 任意の実数 x について $-5\sin x - 7\cos x = r\sin(x + s)$.

XY 座標平面における点 $P = (-5, -7)$ に対して、原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\text{rad}$ (u は実数) とおく. $-\frac{3\pi}{2} < u < -\frac{\pi}{2}$ としてよい. 定理 10.9.5 より、任意の実数 x について



$$\begin{aligned} -5\sin x - 7\cos x &= \sqrt{(-5)^2 + (-7)^2} \sin(x + u) \\ &= \sqrt{74} \sin(x + u). \end{aligned}$$

$\tan u = \frac{7}{5}$ なので, $\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\frac{7}{5}$. $-\frac{3\pi}{2} < u < -\frac{\pi}{2}$ より $-\frac{\pi}{2} < u + \pi < \frac{\pi}{2}$ なので

$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\{\tan(u + \pi)\} = u + \pi.$$

よって $u + \pi = \tan^{-1}\frac{7}{5}$ なので, $u = \tan^{-1}\frac{7}{5} - \pi$. 任意の実数 x について

$$-5\sin x - 7\cos x = \sqrt{74} \sin\left(x + \tan^{-1}\frac{7}{5} - \pi\right).$$

$r = \sqrt{74}$ かつ $s = \tan^{-1}\frac{7}{5} - \pi$ とすればよい. 終

問題 10.補遺3.4 次のような実数 r, s の組を一つ求めなさい: 任意の実数 x について $-7\sin x - 4\cos x = r\sin(x + s)$.