§11.1　写像

写像 (mapping) といわれる対応を定義します．

定義　集合 A の各要素に対して集合 B の要素が唯一つ定まるとき，この対応を集合 A から集合 B への写像という．

写像は対応そのものであり，抽象的な概念ですが，数学では写像も1つの“もの”として扱います．写像をよく f とか g とか φ とか ψ とかの文字で表します．

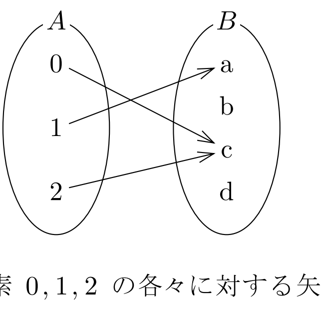
集合 A から集合 B への写像 f について，集合 A を写像 f の**定義域** (domain) といいます．また，写像 f が定義域 A の要素 a に対応させる値を，a に対する f の値といい，$f(a)$ または fa と書き表します．写像 f の定義域の各要素 x に対する $f(x)$ の値の全体を**値域** (range) といいます．

例　集合 A と B とを次のように定めます：

$$A=\{0,1,2\}\ ,\qquad B=\{\mathrm{a,b,c,d}\}\ .$$

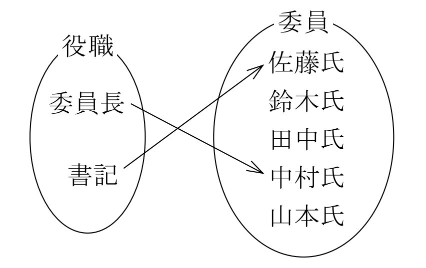
a, b, c, d は互いに異なるものとします．A から B への写像 f を次のように定めます：

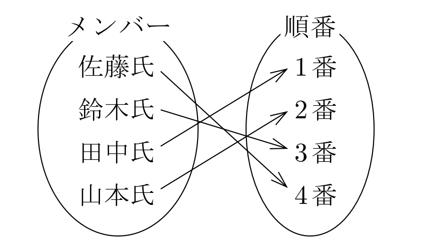
$$f(0)=\mathrm{c}\ ,\qquad f(1)=\mathrm{a}\ ,\qquad f(2)=\mathrm{c}\ ,$$



この写像 f は右上図のように図示できます．定義域の要素 $0,1,2$ の各々に対する矢線の先が対応する写像の値です．この写像 f の値域は集合 $\{\mathrm{a,c}\}$ です．　終

例　佐藤氏と鈴木氏と田中氏と中村氏と山本氏との5人を委員とする委員会において委員長と書記とを一人ずつ決めることは，数学的にいうと，役職の集合 {委員長, 書記} から委員の集合 {佐藤氏, 鈴木氏, 田中氏, 中村氏, 山本氏} への写像を決めることです．例えば委員長を中村氏に書記を佐藤氏にすることは右図のような写像になります．また例えば，佐藤氏と鈴木氏と田中氏と山本氏との4人に1番から4番までの順番をつけることは，4人の集合 {佐藤氏, 鈴木氏, 田中氏, 山本氏} から順番の集合 {1番, 2番, 3番, 4番} への写像を決めることです．例えば田中氏を1番に山本氏を2番に鈴木を3番に佐藤氏を4番にすることは右上図のような写像になります．　終



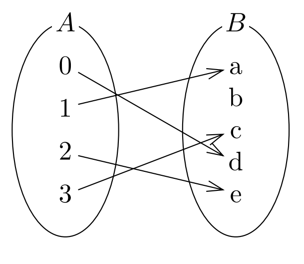


このように，何事かを決めることは，しばしば，数学的には“写像”を決めることになります．

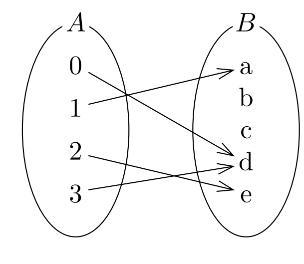
集合 A から集合 B への写像 f について，いつも A の相異なる要素 u と v との各々に対する要素 $f(u)$ と $f(v)$ とが相異なるとき，f は**1対1**であるといいます．

定義　集合 A から集合 B への写像 f が1対1であるとは次の条件が成り立つことである：A の任意の要素 u,v について，$u\neq v$ ならば $f(u)\neq f(v)$ ．

例　集合 $A=\{0,1,2,3\}$ から集合 $B=\{\mathrm{a,b,c,d,e}\}$ への写像を考えます (a, b, c, d, e は互いに異なるものとします)．次のような2個の写像 f と g とを考えます．



1対1の写像 f



1対1でない写像 g

写像 f の値 $f(0),f(1),f(2),f(3)$ は総て相異なるので，f は1対1です．$0\neq 3$ なのに $g(0)=g(3)$ ですから，写像 g は1対1ではありません．　終

集合 A から集合 B への写像 f が1対1である条件

“ A の任意の要素 u,v について，$u\neq v$ ならば $g(u)\neq f(v)$ ”

は，次の条件と同値です[1]：

“ A の任意の要素 u,v について，$f(u)=f(v)$ ならば $u=v$ ”．

例題　以下の対応について，写像であるか，写像であるならば1対1であるか，述べる．

(1)　高専の学生の全体から高専における学年の全体 {第1学年, 第2学年, 第3学年, 第4学年, 第5学年} への対応で，各学生に対してその学生の学年を対応させるもの．

(2)　高専の学生の全体から高専のクラブ全体への対応で，各学生にその学生が属すクラブを対応させるもの．

(3)　高専のあるクラスの学生全員から自然数全体への対応で，そのクラスの各学生にその学生の名列番号（出席番号）を対応させるもの．

(4)　高専の学生の全体から高専の教員の全体への対応で，各学生に対してその学生に授業をする教員を対応させるもの．

〔解説〕

(1)　各学生に対してその学生の学年は唯一つに決まるので，この対応は写像である．また，同じ学年に属す学生は多数いる．つまり，異なる学生でも属する学年は同じになることがある．従ってこの写像は1対1でない．

(2)　どのクラブにも属さない学生もいるので，一般的にはこの対応は写像ではない．

(3)　クラスの各学生に対してその学生の名列番号は唯一つに決まるので，この対応は写像である．一つのクラスの中では，異なる学生名には異なる列番号が付く．従ってこの写像は1対1である．

(4)　高専の各学生に対してその学生に授業をする教員は一人だけではないので，この対応は写像ではない．　終

問題 11.1　以下の対応について，写像であるか，写像であるならば1対1であるか，述べなさい．

(1)　日本国内の市の全体から日本国内の郵便番号の全体への対応で，各々の市にその市内に届く郵便番号を対応させるもの．

(2)　日本国内の県の全体から日本国内の都市の全体への対応で，各県にその県庁所在都市を対応させるもの．

(3)　世界中の人の全体から西暦による年号の全体への対応で，各人にその人が生まれた年の年号を対応させるもの．

(4)　日本人（日本国籍を持つ人）の全体から日本国内の都道府県の全体への対応で，日本人の各々にその人が住む都道府県を対応させるもの．

これからしばしば写像の総数を数え上げることをします．

例　$a\neq b$ のとき，集合 $\{1,2\}$ から集合 $\{\mathrm{a,b}\}$ への写像には以下の4個の写像があります：

$$f(1)=\mathrm{a}\ ,\ f(2)=\mathrm{a}\ \text{となる写像}\ f\ ;$$
$$g(1)=\mathrm{a}\ ,\ g(2)=\mathrm{b}\ \text{となる写像}\ g\ ;$$
$$h(1)=\mathrm{b}\ ,\ h(2)=\mathrm{a}\ \text{となる写像}\ h\ ;$$
$$i(1)=\mathrm{b}\ ,\ i(2)=\mathrm{b}\ \text{となる写像}\ i\ .$$

これらの4個の写像のうち，1対1であるのは g と h とです．　終

――――― 関数と写像

集合 A を定義域とする関数とは，

A の各要素に対して唯一のものを定める対応

で，集合 A から集合 B への写像とは，

A の各要素に対して B の要素を唯一つ定める対応

です．ですから，関数と写像とは基本的に同じものです．定義域とか値域とかも同じ意味です．関数と写像との（本質的でない）違いは次のようなものです．集合 A から集合 B への写像 f というと，f の値は総て集合 B の要素であると断られています．しかし，集合 A を定義域とする関数 f というと，f の値に関する条件はとりあえず考えていません．

---

[1] 条件“ $f(u)=f(v)$ ならば $u=v$ ”は条件“ $u\neq v$ ならば $f(u)\neq f(v)$ ”の対偶です．0.6節で述べたように，対偶は元の条件と同値です．