

§ 11.6 組合せの総数

例解 A君とB君とC君とD君との異なる4人の中から3人を選ぶとき、選ばれた3人の集まりは、数学的にいうと、要素が4個の集合 $\{A, B, C, D\}$ の部分集合で要素が3個のものです。ですから、A君とB君とC君とD君との4人の中から3人を選ぶときの場合の総数は、要素が4個の集合 $\{A, B, C, D\}$ の部分集合で要素が3個のもの総数です。 終

このように、要素の個数が決められた部分集合を**組合せ** (combination) といいます。

定義 自然数 n と r について $r \leq n$ とする。異なる n 個のもの $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ の中から r 個のものを取り出す組合せとは、要素が n 個の集合 $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n\}$ の部分集合で要素が r 個のもののことである。異なる n 個のものから r 個のものを取り出す組合せの総数を ${}_n C_r$ と書き表す。

例解 前節で述べたように、異なる4個のもの A, B, C, D の中から3個のものを取り出す順列とは、A, B, C, D の中で、一つのものに番号が重複しないように1番2番3番の番号を付けることです。このような番号のつけ方を次のように2段階に分けて考えます：

第1段階：A, B, C, D の4個のものの中から3個のものを選ぶ；

第2段階：選ばれた3個のもの各々に、一つのものに番号が重複しないように、1番2番3番の番号を付ける。

第1段階において、A, B, C, D の4個のものの中から3個のもの選ぶときにあり得る場合の総数は、組合せの総数 ${}_4 C_3$ です。それらの中のどの場合でも、第2段階において、選ばれた3個のもの各々に1番2番3番の番号を付けるときあり得る場合の総数は、順列の総数 ${}_3 P_3$ です。従って積の法則より、3個のものを選んで番号を付けるときの場合の総数は ${}_4 C_3 \times {}_3 P_3$ です。A, B, C, D の4個のものの中から3個のものに1番2番3番の番号を付けるときあり得る場合の総数は ${}_4 P_3$ ですから、次のようになります：

$${}_4 C_3 \times {}_3 P_3 = {}_4 P_3 .$$

よって次の等式が成り立ちます：

$${}_4 C_3 = \frac{{}_4 P_3}{{}_3 P_3} .$$

次のように考えることもできます。異なる4個のもの A, B, C, D の中から3個のものを取り出す順列は、A, B, C, D の中の3個のものに1番2番3番の番号を付ける(但し一つのものに複数の番号が付かない) ことでした；ここで番号を付けた3個のものから番号を外すと、要素の個数が3の単なる集合つまり組合せになります。

$\left. \begin{array}{l} 1番がAで2番がBで3番がCの順列 \\ 1番がAで2番がCで3番がBの順列 \\ 1番がBで2番がAで3番がCの順列 \\ 1番がBで2番がCで3番がAの順列 \\ 1番がCで2番がAで3番がBの順列 \\ 1番がCで2番がBで3番がAの順列 \end{array} \right\}$	番号を外すと 組合せ $\{A, B, C\}$
$\left. \begin{array}{l} 1番がAで2番がBで3番がDの順列 \\ 1番がAで2番がDで3番がBの順列 \\ 1番がBで2番がAで3番がDの順列 \\ 1番がBで2番がDで3番がAの順列 \\ 1番がDで2番がAで3番がBの順列 \\ 1番がDで2番がBで3番がAの順列 \end{array} \right\}$	番号を外すと 組合せ $\{A, B, D\}$
$\left. \begin{array}{l} 1番がAで2番がCで3番がDの順列 \\ 1番がAで2番がDで3番がCの順列 \\ 1番がCで2番がAで3番がDの順列 \\ 1番がCで2番がDで3番がAの順列 \\ 1番がDで2番がAで3番がCの順列 \\ 1番がDで2番がCで3番がAの順列 \end{array} \right\}$	番号を外すと 組合せ $\{A, C, D\}$
$\left. \begin{array}{l} 1番がBで2番がCで3番がDの順列 \\ 1番がBで2番がDで3番がCの順列 \\ 1番がCで2番がBで3番がDの順列 \\ 1番がCで2番がDで3番がBの順列 \\ 1番がDで2番がBで3番がCの順列 \\ 1番がDで2番がAで3番がBの順列 \end{array} \right\}$	番号を外すと 組合せ $\{B, C, D\}$

このように、番号を外すと6個の順列が1個の組合せになります。つまり、番号を外すと3個のものに付けられた1番2番3番の番号が無視されるので、 ${}_3 P_3$ 個の順列が1個の組合せになります。従って、組合せの総数 ${}_4 C_3$ は順列の総数 ${}_4 P_3$ を ${}_3 P_3$ で割ったものです：

$${}_4 C_3 = \frac{{}_4 P_3}{{}_3 P_3} . \quad \text{終}$$

一般的に述べます。自然数 n と r について $r \leq n$ とします。異なる n 個のものの中から r 個のものを取り出す組合せの総数は ${}_n C_r$ です；これらのどの組合せについても、取り出した r 個のものに、一つのものに番号が重複しないように1番から r 番までの番号を付けるときの場合の総数は ${}_r P_r$ です。したがって、積の法則より、異なる n 個のものの中から r 個のものを取り出して番号が重複しないように1番から r 番までの番号を付けるときの場合の総数 ${}_n P_r$ は次のようになります：

$${}_n C_r \times {}_r P_r = {}_n P_r .$$

これより、

$${}_n C_r = \frac{{}_n P_r}{{}_r P_r} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

或いは

$${}_n C_r = \frac{{}_n P_r}{{}_r P_r} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)(r-3)\cdots 2 \cdot 1} .$$

定理 11.6.1 自然数 n と r について $r \leq n$ とする。異なる n 個のものから r

個のものを取り出す組合せの総数 ${}_n C_r$ は

$${}_n C_r = \frac{{}_n P_r}{{}_r P_r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{(n-r+1) \cdot (n-r+2) \cdot (n-r+3) \cdots (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (r-1) \cdot r} .$$

例題 異なる7人の人間の中から3人のグループを作るときにあり得る場合の総数を求める。

異なる7人の人間の中から3人のグループを作るときにあり得る場合の総数は、異なる7人の中から3人を取り出す組合せの総数 ${}_7 C_3$ である：

$${}_7 C_3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35 . \quad \text{終}$$

問題 11.6.1 異なる8匹の猫の中から3匹の猫を選ぶときにあり得る場合の総数を求めなさい。

例解 8人の人の中からバスケットボールチームの選手5人を選ぶときにあり得る場合の総数は次のようになります：

$${}_8 C_5 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 8 \cdot 7 = 56 .$$

ところが、8人の中から選手5人を選ぶことは、8人の中から選手でない3人を選ぶことと同等です。従って、8人の中から選手5人を選ぶときにあり得る場合の総数は、8人の中から選手でない3人を選ぶときにあり得る場合の総数

$${}_8 C_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 8 \cdot 7 = 56$$

と等しくなります： ${}_8 C_5 = {}_8 C_3$. 終

一般的に次の定理が成り立ちます。

定理 11.6.2 自然数 n と r について $r \leq n$ のとき、

$${}_n C_r = {}_n C_{n-r} .$$

証明 定理 11.6.1 より、 n 以下の各自然数 k について ${}_n C_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. よって、

$${}_n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} , \quad {}_n C_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)! \{n-(n-r)\}!} = \frac{n!}{(n-r)! r!} ;$$

従って ${}_n C_r = {}_n C_{n-r}$. (証明終り)

例題 9人の人の中からバレーボールチームの選手6人を選ぶときにあり得る場合の総数を求める。

$${}_9 C_6 = {}_9 C_3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84 . \quad \text{終}$$

問題 11.6.2 将棋部の部員11人の中から将棋の大会に出場する選手を8人選ぶときにあり得る場合の総数を求めなさい。