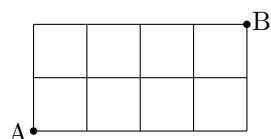


§ 11.8 経路の総数

例解 右図では、A地点からB地点へ行くための道を線で表している。これらの道を通して、右図で右向きまたは上向きに進むだけで、A地点からB地点へ行く経路の総数を求めます。交差点から次の交差点までの道のりを1区画とします。A地点から右向きに4区画と上向きに2区画との併せて6区画進めばB地点に到達します。右向きに1区画進むことを右向き矢印‘→’で、上向きに1区画進むことを上向き矢印‘↑’で表すことにします。そして、A地点からB地点までの経路と、矢印‘→’と‘↑’との列で‘→’が4回‘↑’が2回現れるものとは対応させます。例えば次のようになります：



経路 と 矢印の列 “→→↑→↑→” とが対応する；

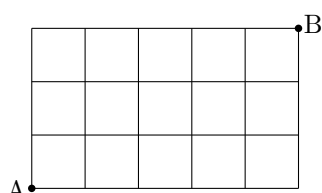
経路 と 矢印の列 “↑→→↑→→” とが対応する。

このとき、A地点からB地点までの経路と、矢印‘→’と‘↑’とから成る列で‘→’が4回‘↑’が2回現れるものとは、過不足なく一つずつ対応します。従って、A地点からB地点までの経路の総数は、矢印‘→’と‘↑’とから成る列で‘→’が4回‘↑’が2回現れるものの総数ですから、

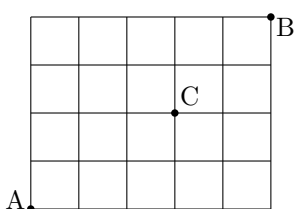
$${}_6C_4 = {}_6C_2 = 15 = 60 .$$

終

問題 11.8.1 右図では、A地点からB地点へ行くための道を線で表しています。これらの道を通して、右図で右向きまたは上向きに進むだけで、A地点からB地点へ行く経路の総数を求めなさい。



例題 右図では、A地点からB地点へ行くための道を線で表している。これらの道を通して、右図で右向きまたは上向きに進むだけで、交差点Cを經由してA地点からB地点へ行く経路の総数を求める。

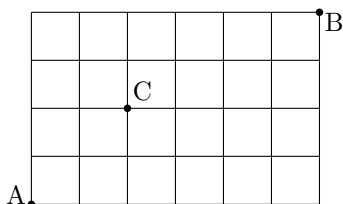


【解説】 交差点Cを經由してA地点からB地点へ行く経路は、A地点から交差点Cへ行く経路と交差点CからB地点へ行く経路とをつないだものである。A地点から交差点Cへ行く経路の総数は ${}_5C_2$ 。その経路の各々に対して、交差点CからB地点へ行く経路の総数は ${}_4C_2$ 。従って、積の法則より、交差点Cを經由してA地点からB地点へ行く経路の総数は

$${}_5C_2 \times {}_4C_2 = 10 \times 6 = 60 .$$

終

問題 11.8.2 右図では、A地点からB地点へ行くための道を線で表しています。これらの道を通して、右図で右向きまたは上向きに進むだけで、交差点Cを經由してA地点からB地点へ行く経路の総数を求めなさい。



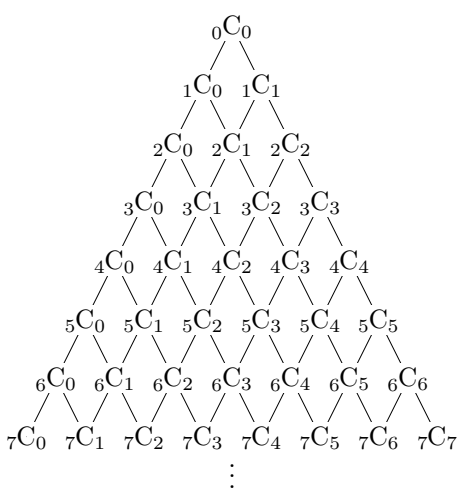
右図のように、格子状に道路網があるとき、各交差点において、A地点からその交差点までの遠回りしない経路の総数を書き込んでみます。この経路の総数は次のように考えることもできます。

${}_4C_4 = 1$	${}_5C_4 = 5$	${}_6C_4 = 15$	${}_7C_4 = 35$	${}_8C_4 = 70$
${}_3C_3 = 1$	${}_4C_3 = 4$	${}_5C_3 = 10$	${}_6C_3 = 20$	${}_7C_3 = 35$
${}_2C_2 = 1$	${}_3C_2 = 3$	${}_4C_2 = 6$	${}_5C_2 = 10$	${}_6C_2 = 15$
${}_1C_1 = 1$	${}_2C_1 = 2$	${}_3C_1 = 3$	${}_4C_1 = 4$	${}_5C_1 = 5$
${}_0C_0 = 1$	${}_1C_0 = 1$	${}_2C_0 = 1$	${}_3C_0 = 1$	${}_4C_0 = 1$

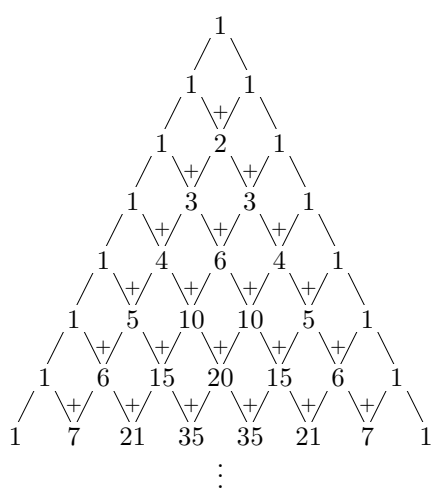
1	$1+5=6$					
1	$1+4=5$	$5+10=15$				
1	$1+3=4$	$4+6=10$	$10+10=20$			
1	$1+2=3$	$3+3=6$	$6+4=10$	$10+5=15$		
1	$1+1=2$	$2+1=3$	$3+1=4$	$4+1=5$	$5+1=6$	
1	1	1	1	1	1	

上図において、A地点から出発します。遠回りをせずに交差点Dまで行く経路は、左隣の交差点Bを通る経路と直ぐ下の交差点Cを通る経路とに分けられます。従って、交差点Bまでの経路の総数が m で交差点Cまでの経路の総数が n であるとき、交差点Dまでの経路の総数は $m+n$ です。

このような経路の総数を、出発点を頂上にして下方に広がっていく形で書き込んだ図をパスカルの三角形²⁾といいます。



パスカルの三角形



パスカルの三角形 (計算結果)

²⁾ パスカル (Pascal) は17世紀のフランスの数学者・物理学者・哲学者です。