§11.9　二項定理

自然数 n 及び数を表す文字 a, b に対して，式 $(a+b)^n$ を展開・整理するとどうなるか考えます．右図のような図式を重ねていきます．

$$\bigcirc\times(a+b) = \bigcirc\times a + \bigcirc\times b$$

まず，$(a+b)^1 = a+b$ です．この等式の右辺 $a+b$ の各項に $a+b$ を掛けて同類項を整理します．

$$(a+b)^1 = a + b$$
$$ab \quad ab$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

更にこの等式の右辺 $a^2+2ab+b^2$ の各項に $a+b$ を掛けて同類項を整理します．

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$a^2b \quad 2a^2b \quad 2ab^2 \quad ab^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

このようにして $(a+b)^n$ を展開・整理した式を求めていくことができます．

$$(a+b)^1 = a + b$$
$$ab \quad ab$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$a^2b \quad 2a^2b \quad 2ab^2 \quad ab^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$a^3b \quad 3a^3b \quad 3a^2b^2 \quad 3a^2b^2 \quad 3ab^3 \quad ab^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$a^4b \quad 4a^4b \quad 4a^3b^2 \quad 6a^3b^2 \quad 6a^2b^3 \quad 4a^2b^3 \quad 4ab^4 \quad ab^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$\vdots$$

簡略にすると次のようにまとめられます．

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a + b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$\vdots$$

等式の右辺の各項の中の係数だけをみるとパスカルの三角形になります．例えば，$(a+b)^5$ を展開・整理した式の中の項 $10a^3b^2$ の中の係数 10 は，矢印に沿って頂点の 1 のところから $10a^3b^2$ の項のところへ行く経路の総数 ${}_5\mathrm{C}_2 = 10$ です．

$$(a+b)^0 = \mathbf{1}$$
$$(a+b)^1 = \mathbf{1}a + \mathbf{1}b$$
$$(a+b)^2 = \mathbf{1}a^2 + \mathbf{2}ab + \mathbf{1}b^2$$
$$(a+b)^3 = \mathbf{1}a^3 + \mathbf{3}a^2b + \mathbf{3}ab^2 + \mathbf{1}b^3$$
$$(a+b)^4 = \mathbf{1}a^4 + \mathbf{4}a^3b + \mathbf{6}a^2b^2 + \mathbf{4}ab^3 + \mathbf{1}b^4$$
$$(a+b)^5 = \mathbf{1}a^5 + \mathbf{5}a^4b + \mathbf{10}a^3b^2 + \mathbf{10}a^2b^3 + \mathbf{5}ab^4 + \mathbf{1}b^5$$

$$1$$
$$a \quad b$$
$$a^2 \quad 2ab \quad b^2$$
$$a^3 \quad 3a^2b \quad 3ab^2$$
$$4a^3b \quad 6a^2b^2$$
$$10a^3b^2$$

$$\left.\begin{array}{l}
1\times a\times a\times a\times b\times b = a^3b^2\\
1\times a\times a\times b\times a\times b = a^3b^2\\
1\times a\times a\times b\times b\times a = a^3b^2\\
1\times a\times b\times a\times a\times b = a^3b^2\\
1\times a\times b\times a\times b\times a = a^3b^2\\
1\times a\times b\times b\times a\times a = a^3b^2\\
1\times b\times a\times a\times a\times b = a^3b^2\\
1\times b\times a\times a\times b\times a = a^3b^2\\
1\times b\times a\times b\times a\times a = a^3b^2\\
1\times b\times b\times a\times a\times a = a^3b^2
\end{array}\right\}\text{合計 } 10a^3b^2$$

あるいは，$(a+b)^5$ を展開・整理した式の中の項 $10a^3b^2$ の中の係数 10 は，1回めから5回めまでの掛け算を a を掛ける3回と b を掛ける2回とに割り振る割り振り方の総数 ${}_5\mathrm{C}_2 = 10$ です．このように，$(a+b)^5$ を展開・整理すると次のようになります:

$$(a+b)^5 = {}_5\mathrm{C}_0\,a^5 + {}_5\mathrm{C}_1\,a^4b + {}_5\mathrm{C}_2\,a^3b^2 + {}_5\mathrm{C}_3\,a^2b^3 + {}_5\mathrm{C}_4\,ab^4 + {}_5\mathrm{C}_5\,b^5 .$$

一般的に次の定理が成り立ちます．

定理（二項定理）　自然数 n 及び数 a と b とに対して，

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= {}_n\mathrm{C}_0\,a^n + {}_n\mathrm{C}_1\,a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2\,a^{n-2}b^2 + {}_n\mathrm{C}_3\,a^{n-3}b^3 + {}_n\mathrm{C}_4\,a^{n-4}b^4 + \cdots\\ &\quad + {}_n\mathrm{C}_{n-3}\,a^3b^{n-3} + {}_n\mathrm{C}_{n-2}\,a^2b^{n-2} + {}_n\mathrm{C}_{n-1}\,ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n\,b^n .\end{aligned}$$

例題　変数 u と v とに対して $(u+v)^6$ を展開して整理する．

二項定理より，

$$\begin{aligned}(u+v)^6 &= {}_6\mathrm{C}_0\,u^6 + {}_6\mathrm{C}_1\,u^5v + {}_6\mathrm{C}_2\,u^4v^2 + {}_6\mathrm{C}_3\,u^3v^3 + {}_6\mathrm{C}_4\,u^2v^4 + {}_6\mathrm{C}_5\,uv^5 + {}_6\mathrm{C}_6\,v^6\\ &= u^6 + 6u^5v + 15u^4v^2 + 20u^3v^3 + 15u^2v^4 + 6uv^5 + v^6 .\end{aligned}$$

終

問題 11.9.1　変数 x と y とに対して $(x+y)^7$ を展開して整理しなさい．

例題　変数 x に対して $(2x+3)^4$ を展開して整理する．

二項定理より，

$$\begin{aligned}(2x+3)^4 &= {}_4\mathrm{C}_0\,(2x)^4 + {}_4\mathrm{C}_1\,(2x)^3 3 + {}_4\mathrm{C}_2\,(2x)^2 3^2 + {}_4\mathrm{C}_3\,2x3^3 + {}_4\mathrm{C}_4\,3^4\\ &= 16x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81 .\end{aligned}$$

終

問題 11.9.2　変数 y に対して $(3y+2)^4$ を展開して整理しなさい．