第１章の補遺２　２の平方根は無理数であることの証明

1.6 節末で説明したように，正の 2 の平方根つまり $\sqrt{2}$ は小数で表せるので実数です．しかし $\sqrt{2}$ は有理数ではありません；つまり $\sqrt{2}$ は無理数です．このことを証明します．

整数 m と n とが互いに素であるとは，m と n との公約数は 1 と -1 とだけであることです．

有理数は分母と分子とが整数である分数で表されます．そのような分数は，できる限り約分していくと，いつかは約分できない分数になります．分数が約分できないとき，分母の整数と分子の整数との公約数は 1 と -1 とだけです；つまり分母の整数と分子の整数とは互いに素になります．このようにして次の定理が証明されます．

補助定理A　任意の有理数 x に対して $x=\dfrac{m}{n}$ となる互いに素な整数 m と n とがある．

補助定理をもう１つ準備します．

補助定理B　任意の整数 m について，m^2 が偶数ならば m は偶数である．

証明　整数 m が奇数であれば，適当な整数 k を選ぶと $m=2k+1$ となるので，

$$m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1\ ;$$

従って m^2 も奇数である．つまり次のことがいえる：m が奇数ならば m^2 は奇数である．この対偶をとると次のことがいえる：m^2 が奇数でないならば m も奇数でない．奇数でない整数は偶数なので，次のことがいえる：m^2 が偶数ならば m は偶数である．（証明終り）

有理数でない実数を無理数といいます．先に述べた 2 個の補助定理を用いて，$\sqrt{2}$ が無理数であることを証明します．$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定して矛盾を導きます．

仮に $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定します．補助定理 A より，$\sqrt{2}=\dfrac{m}{n}$ となる互いに素な2つの整数 m と n とがあります．

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = \sqrt{2}^{\,2}\ ,$$
$$\frac{m^2}{n^2} = 2\ ,$$
$$2n^2 = m^2\ .$$

$2n^2$ は偶数ですから m^2 は偶数です．従って，上の補助定理 B より，m も偶数です．ですから，$k=\dfrac{m}{2}$ とおくと，k は整数です．上の等式 $2n^2=m^2$ 及び $m=2k$ より，

$$2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2\ ,$$
$$n^2 = 2k^2\ .$$

$2k^2$ は偶数ですから n^2 は偶数です，従って，上の補助定理 B より，n も偶数です．このように，m も n も偶数です．つまり，2 は m と n との公約数です．ところが，m と n とは互いに素です．つまり，m と n の公約数は 1 と -1 とだけです．

このように，$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定すると矛盾が生じます．ですから $\sqrt{2}$ が有理数であるという仮定は間違いです．つまり $\sqrt{2}$ は有理数ではありません．