§2.3　整式の除法

まず単項式の除法から始めます．自然数 m, n について $m \geq n$ とします．文字 x が現れない式 A, B に対して，x の単項式 Ax^m を x の単項式 Bx^n で割ると商はやはり x の単項式になります：指数法則（1.2節参照）より $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ ですから，

$$(Ax^m) \div (Bx^n) = \frac{Ax^m}{Bx^n} = \frac{A}{B}\frac{x^m}{x^n} = \frac{A}{B}x^{m-n} .$$

$\boxed{\text{例}}$　x の単項式 $4x^5$ を $7x^3$ で割ります．

$$(4x^5) \div (7x^3) = \frac{4x^5}{7x^3} = \frac{4}{7}\frac{x^5}{x^3} = \frac{4}{7}x^{5-3} = \frac{4}{7}x^2 .$$

$\boxed{\text{終}}$

整数の除法を復習します．整数を整数で割るとき，整数の範囲で考えた商を整商といい，余りのことを剰余といいます．例えば，23 を 5 で割ると整商は 4 で [2] 剰余は 3 です；このとき $23 = 5 \times 4 + 3$ ，$0 \leq 3 < 5$ となります．一般に，整数 a を 0 以外の整数 b で割るときの整商 q 及び剰余 r は次のような整数です：

$$a = bq + r \quad \text{かつ} \quad 0 \leq r < |b| .$$

整式を整式で割るときの**整商**及び**剰余**の定義では，整式の次数が重要になります．

> **定義**　x の整式 A 及び 0 以外の x の整式 B に対して，A を B で割るときの整商 Q 及び，A を B で割るときの剰余 R は，次のような整式である：
> $A = BQ + R$ かつ R は 0 または B より次数が低い整式である．

一つの文字に着目して任意の整式を 0 以外の任意の整式で割るとき，整商と剰余とが各々唯1つ決まります [3]．割られる整式と割る整式と整商と剰余との関係は次のようになります：剰余は 0 かまたは割る整式より次数が低い整式で，

$$(\text{割られる整式}) = (\text{割る整式}) \times (\text{整商}) + (\text{剰余}) .$$

$\boxed{\text{例}}$　x の整式 P を x の整式 $x^2 - 2x - 3$ で割ると整商が $x + 2$ で剰余が $4x - 3$ になるとき，

$$\begin{aligned} P &= (x^2 - 2x - 3)(x + 2) + 4x - 3 = x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x - 3x - 6 + 4x - 3 \\ &= x^3 - 3x - 9 . \end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 2.3.1}}$　x の整式 P を $x^2 - 4x + 5$ で割ると整商は $2x + 3$ で剰余は $5x - 7$ になります．この整式 P を求めなさい．

ある文字に着目して整式を整式で割るときの整商と剰余とを求めることを整式の除法といいます．整式の除法の計算法を説明します．

$\boxed{\text{例解}}$　x の整式 $A = 6x^2 + 5x - 7$ を x の整式 $B = 2x - 1$ で割ります．以下のように計算します．まず，$6x^2$ を $2x$ で割って $3x$ を立てます：

$$\begin{array}{rll} & 3x & \\ \cline{2-2} B \to 2x-1\,\big) & 6x^2+5x-7 & \leftarrow A . \end{array}$$

A から $B \cdot 3x = 6x^2 - 3x$ を引きます：

$$\begin{array}{rll} & 3x & \\ \cline{2-2} B \to 2x-1\,\big) & 6x^2+5x-7 & \leftarrow A \\ & 6x^2-3x & \leftarrow B \cdot 3x \\ \cline{2-2} & 8x-7 & \leftarrow A - B \cdot 3x . \end{array}$$

次に，$8x$ を $2x$ で割って 4 を立てて，$A - B \cdot 3x$ から $B \cdot 4 = 8x - 4$ を引きます：

$$\begin{array}{rll} & 3x+4 & \\ \cline{2-2} B \to 2x-1\,\big) & 6x^2+5x-7 & \leftarrow A \\ & 6x^2-3x & \leftarrow B \cdot 3x \\ \cline{2-2} & 8x-7 & \leftarrow A - B \cdot 3x \\ & 8x-4 & \leftarrow B \cdot 4 \\ \cline{2-2} & -3 & \leftarrow A - B \cdot 3x - B \cdot 4 = A - B(3x+4) . \end{array}$$

よって $A - B(3x+4) = -3$ ですから，次の等式が成り立ちます：

$$A = B(3x+4) - 3 .$$

整式 -3 の次数は 0 で　$B = 2x - 1$　の次数 1 より低いですから，整式 $A = 6x^2 + 5x - 7$ を整式 $B = 2x - 1$ で割ると整商は $3x + 4$ で剰余は -3 です．

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例解}}$　x の整式 $A = 3x^3 - 7x$ を整式 $B = 2x + 3$ で割ります．まず $3x^3 \div 2x = \dfrac{3}{2}x^2$ が立ち，

$$A - B \cdot \frac{3}{2}x^2 = 3x^3 - 7x - \left(3x^3 + \frac{9}{2}x^2\right) = -\frac{9}{2}x^2 - 7x ;$$

次に $-\dfrac{9}{2}x^2 \div 2x = -\dfrac{9}{4}x$ が立ち，

$$\begin{aligned} A - B \cdot \frac{3}{2}x^2 - B\left(-\frac{9}{4}x\right) &= -\frac{9}{2}x^2 - 7x - \left(-\frac{9}{2}x^2 - \frac{27}{4}x\right) \\ &= -\frac{1}{4}x ; \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rl} & \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{9}{4}x - \tfrac{1}{8} \\ \cline{2-2} 2x+3\,\big) & 3x^3 \phantom{+\tfrac{9}{2}x^2} - 7x \phantom{-\tfrac{3}{8}} \\ & 3x^3 + \tfrac{9}{2}x^2 \phantom{- 7x -\tfrac{3}{8}} \\ \cline{2-2} & -\tfrac{9}{2}x^2 - 7x \phantom{-\tfrac{3}{8}} \\ & -\tfrac{9}{2}x^2 - \tfrac{27}{4}x \phantom{-\tfrac{3}{8}} \\ \cline{2-2} & -\tfrac{1}{4}x \phantom{-\tfrac{3}{8}} \\ & -\tfrac{1}{4}x - \tfrac{3}{8} \\ \cline{2-2} & \tfrac{3}{8} \end{array}$$

更に $-\dfrac{1}{4}x \div 2x = -\dfrac{1}{8}$ が立ち，

$$A - B \cdot \frac{3}{2}x^2 - B\left(-\frac{9}{4}x\right) - B\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{4}x - \left(-\frac{1}{4}x - \frac{3}{8}\right) = \frac{3}{8} ;$$

従って

$$A = B \cdot \frac{3}{2}x^2 + B\left(-\frac{9}{4}x\right) + B\left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{3}{8} = B\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{4}x - \frac{1}{8}\right) + \frac{3}{8} .$$

$A = 3x^3 - 7x$　を　$B = 2x + 3$　で割ると整商は $\dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{9}{4}x - \dfrac{1}{8}$ で剰余は $\dfrac{3}{8}$ です．

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 2.3.2}}$　x の整式 $6x^2 - 8x - 13$ を x の整式 $3x + 2$ で割るときの整商と剰余とを求めなさい．

$\boxed{\text{問題 2.3.3}}$　x の整式 $5x^3 - 3x^2 - 9$ を x の整式 $2x - 3$ で割るときの整商と剰余とを求めなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　x の整式 $3x^3 - 4x^2 + 2$ を x の整式 $x^2 - 3x + 2$ で割で割るときの整商と剰余とを求める．

実際に割り算すると右図のようになる．よって，整式 $3x^3 - 4x^2 + 2$ を整式 $x^2 - 3x + 2$ で割ると，整商は $3x + 5$ で剰余は $9x - 8$ である．

$$\begin{array}{rrrrr} & & & 3x & +\ 5 \\ \cline{2-5} x^2-3x+2\,\big) & 3x^3 & -4x^2 & & +\ 2 \\ & 3x^3 & -9x^2 & +\ 6x & \\ \cline{2-4} & & 5x^2 & -\ 6x & +\ 2 \\ & & 5x^2 & -15x & +10 \\ \cline{3-5} & & & 9x & -\ 8 \end{array}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 2.3.4}}$　x の整式 $2x^3 - 7x^2$ を x の整式 $x^2 - 2x - 4$ で割るときの整商と剰余とを求めなさい．

一般に，自然数 m と n とについて，$m \geq n$ のとき，

x の m 次式を x の n 次式で割ると整商は x の $(m-n)$ 次式

になります．

整式という式の種類は，数の種類でいうと整数に似ています．整数と整数との和・差・積は必ず整数ですが，整数を整数で割ると整数の範囲では割り切れないことがよくあります．同様に，整式と整式との和・差・積は必ず整式ですが，整式を整式で割ると整式の範囲では割り切れないことがよくあります．

---

[2] 有理数の範囲で 23 を 5 で割るときの商は $\dfrac{23}{5}$ です．この商と区別するために，整数の範囲内での商を特に整商といいます．

[3] 本来はきちんと証明する必要があります．