

§3.10 恒等式

例として x の整式 $(x-2)(2x-3)$ を展開します：

$$(x-2)(2x-3) = 2x^2 - 7x + 6 .$$

ここで、文字 x が現れるこの等式は、 x の値がどんな数でも $(x-2)(2x-3) = 2x^2 - 7x + 6$ となることを意味します。

このように、例えば文字 x が現れる等式について、任意の数 x についてその等式が成り立つ（と考える）とき、その等式を x に関する（ x についての）**恒等式**といいます。

例 x の3次式 $2x^3 - 5x^2 + 7x - 8$ を2次式 $x^2 - x + 3$ で割ると整商が $2x - 3$ で剰余が $-2x + 1$ になります。このことを式で表すと次の等式になります：

$$2x^3 - 5x^2 + 7x - 8 = (2x - 3)(x^2 - x + 3) - 2x + 1 .$$

この等式は、

$$\text{任意の数 } x \text{ について } 2x^3 - 5x^2 + 7x - 8 = (2x - 3)(x^2 - x + 3) - 2x + 1$$

となることを意図しています；つまり x に関する恒等式です。 終

方程式も恒等式も等式ですが、対照的な概念です。

x に関する方程式とは x の値がある条件を満たす数のときに成り立つ等式のことです、

x に関する恒等式とは x の値がどんな数でも成り立つ等式のことです。

例解 定数 a, b について、等式 $ax + b = 2x + 3$ が x に関する恒等式になるとします。つまり、

$$\text{任意の数 } x \text{ について } ax + b = 2x + 3$$

とします。等式 $ax + b = 2x + 3$ において $x = 0$ とすると、

$$a \cdot 0 + b = 2 \cdot 0 + 3 ,$$

つまり $b = 3$ 。等式 $ax + b = 2x + 3$ において $x = 1$ とすると、

$$a \cdot 1 + b = 2 \cdot 1 + 3 ,$$

つまり $a + b = 5$ 。このことと $b = 3$ とより、 $a + 3 = 5$ 、 $a = 2$ 。こうして次のことが分かります：

等式 $ax + b = 2x + 3$ が x に関する恒等式 ならば $a = 2$ かつ $b = 3$ 。

逆に、 $a = 2$ かつ $b = 3$ のとき、明らかに、

$$\text{任意の数 } x \text{ について } ax + b = 2x + 3$$

です；つまり、このとき等式 $ax + b = 2x + 3$ は x に関する恒等式です：

$a = 2$ かつ $b = 3$ ならば 等式 $ax + b = 2x + 3$ は x に関する恒等式。

以上のことをまとめる：

$$ax + b = 2x + 3 \text{ が } x \text{ に関する恒等式 } \iff a = 2 \text{ かつ } b = 3 . \quad \text{終}$$

この例を一般化すると次の定理が証明できます。

定理 3.10.1 定数 a, b, p, q は変数 x と無関係とする。高々1次の x の整式 $ax + b$ と $px + q$ とについて、

$$\text{等式 } ax + b = px + q \text{ が } x \text{ に関する恒等式 } \iff a = p \text{ かつ } b = q .$$

例題 等式 $a(x+2) + b(x-3) = 3x + 16$ が x に関する恒等式になるように定数 a と b の値を定める。

【方針】 左辺を x について整理して定理3.10.1を用いる。

【解説】 左辺を x について整理すると

$$a(x+2) + b(x-3) = (a+b)x + 2a - 3b .$$

従って、等式

$$(a+b)x + 2a - 3b = 3x + 16$$

が x に関する恒等式になればよい。その条件は、左辺と右辺の係数を比べて、

$$a + b = 3 \text{ かつ } 2a - 3b = 16 .$$

これらの a と b とに関する方程式を解くと、 $a = 5$ 、 $b = -2$ 。 終

問題 3.10.1 等式 $a(2x-3) + b(x+4) = 4x - 17$ が x に関する恒等式になるように定数 a と b の値を定めなさい。

高々2次の整式についても同様のことが成り立ちます。

定理 3.10.2 定数 a, b, c, p, q, r は変数 x と無関係とする。高々2次の x の整式 $ax^2 + bx + c$ と $px^2 + qx + r$ とについて、

$$\text{等式 } ax^2 + bx + c = px^2 + qx + r \text{ が } x \text{ に関する恒等式}$$

$$\iff a = p \text{ かつ } b = q \text{ かつ } c = r .$$

この定理の証明は後にします。

例題 等式 $2x^2 - 3x - 1 = (x-1)(ax+b) + c$ が x に関する恒等式になるように定数 a, b, c の値を定める。

【方針】 右辺を x について整理して定理3.10.2を用いる。

【解説】 右辺を x について整理すると

$$(x-1)(ax+b) + c = ax^2 + bx - ax - b + c = ax^2 + (b-a)x + c - b .$$

従って、等式

$$2x^2 - 3x - 1 = ax^2 + (b-a)x + c - b$$

が x に関する恒等式になればよい。その条件は、左辺と右辺の係数を比べて、

$$a = 2 \text{ かつ } b - a = -3 \text{ かつ } c - b = -1 .$$

これらの a, b, c に関する方程式を解くと、 $a = 2$ 、 $b = -1$ 、 $c = -2$ 。 終

問題 3.10.2 等式 $2x^2 - 5 = ax(x-1) + b(x-1) + c$ が x に関する恒等式になるように定数 a, b, c の値を定めなさい。

例題 等式 $2x^2 - 4x + 7 = a(x+p)^2 + q$ が x に関する恒等式になるように定数 a, p, q の値を定める。

【方針】 右辺を x について整理して定理3.10.2を用いる。

【解説】 右辺を x について整理すると

$$a(x+p)^2 + q = ax^2 + 2apx + ap^2 + q .$$

従って、等式

$$2x^2 - 4x + 7 = ax^2 - 2apx + ap^2 + q .$$

が x に関する恒等式になればよい。その条件は、左辺と右辺の係数を比べて、

$$a = 2 \text{ かつ } 2ap = -4 \text{ かつ } ap^2 + q = 7 .$$

a, p, q に関するこれらの方程式より、

$$a = 2 , \quad p = \frac{4}{-2a} = -1 , \quad q = 7 - ap^2 = 5 .$$

つまり、 $a = 2$ 、 $p = -1$ 、 $q = 5$ 。 終

問題 3.10.3 等式 $2x^2 - 6x + 7 = a(x+p)^2 + q$ が x に関する恒等式になるように定数 a, p, q の値を定めなさい。

等式に現れる複数の文字に着目することもあります。例えば等式に現れる文字 x と y とに着目すると、 x と y との値が何であってもその等式が成り立つ（と考える）とき、その等式を x と y とに関する恒等式といいます。

——— 定理の証明

補助定理 定数 a, b, c は x と無関係とする。高々2次の x の整式 $ax^2 + bx + c$ について、等式 $ax^2 + bx + c = 0$ が x に関する恒等式ならば $a = b = c = 0$ 。

証明 まず、等式 $ax^2 + bx + c = 0$ が x に関する恒等式であると仮定する。つまり、

$$\text{任意の数 } x \text{ について } ax^2 + bx + c = 0$$

とする。恒等式 $ax^2 + bx + c = 0$ において $x = 0$ とすると、

$$c = 0 . \quad (1)$$

恒等式 $ax^2 + bx + c = 0$ において $x = 1$ とすると、

$$a + b + c = 0 . \quad (2)$$

恒等式 $ax^2 + bx + c = 0$ において $x = -1$ とすると、

$$a - b + c = 0 . \quad (3)$$

a, b, c に関する方程式 (1), (2), (3) より $a = b = c = 0$ 。 (証明終り)

定理 定数 a, b, c, p, q, r は x と無関係とする。高々2次の x の整式 $ax^2 + bx + c$ と $px^2 + qx + r$ とについて、

$$\text{等式 } ax^2 + bx + c = px^2 + qx + r \text{ が } x \text{ に関する恒等式}$$

$$\iff a = p \text{ かつ } b = q \text{ かつ } c = r .$$

証明 まず、等式 $ax^2 + bx + c = px^2 + qx + r$ が x に関する恒等式であると仮定する。移項すると $ax^2 + bx + c - (px^2 + qx + r) = 0$ 、左辺を整理すると

$$(a-p)x^2 + (b-q)x + c-r = 0 ;$$

この等式が x に関する恒等式である。従って、補助定理より $a-p = b-q = c-r = 0$ 。故に、 $a = p$ 、 $b = q$ 、 $c = r$ 。

逆に、 $a = p$ 、 $b = q$ 、 $c = r$ と仮定する。このとき、明らかに、

$$\text{任意の数 } x \text{ について } ax^2 + bx + c = px^2 + qx + r .$$

つまり、等式 $ax^2 + bx + c = px^2 + qx + r$ は x に関する恒等式である。 (証明終り)