## § 3.2　2 次方程式の解

変数 $x$ に関する 2 次方程式とは次の形に整理できる方程式のことです：

$$ax^2+bx+c=0 \quad (\ a,b,c \text{ は } x \text{ と無関係な定数で } a\neq 0\ ) .$$

係数が実数である 2 次方程式を解くことを考えます．そのために次のような式変形が重要になります：$x$ の 2 次式 $x^2\pm\square x$ （$\pm\square$ は $x$ の係数）に $\left(\frac{\square}{2}\right)^2$ を加えて，乗法公式 $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$ （複号同順）を適用すると，

$$x^2\pm\square x+\left(\frac{\square}{2}\right)^2 = x^2\pm 2\cdot\frac{\square}{2}x+\left(\frac{\square}{2}\right)^2 = \left(x\pm\frac{\square}{2}\right)^2 \qquad (\text{複号同順}) .$$

定理 1.8.2 を思い起こして下さい：

$$\text{任意の実数 } a \text{ について } \ a=\sqrt{a}^{\,2} \ .$$

定理 1.3.2 は複素数についてもそのまま成り立ちます：複素数 $\alpha$ と $\beta$ とについて，

$$\alpha^2=\beta^2 \iff \alpha=\pm\beta \ .$$

$\boxed{\text{例解}}$　複素数を表す変数 $x$ に関する 2 次方程式 $2x^2+10x+9=0$ を解きます．まず $x^2$ の係数を 1 にするために両辺を 2 で割ります：

$$x^2+5x+\frac{9}{2}=0 \ .$$

両辺から $\frac{9}{2}$ を引くと

$$x^2+5x=-\frac{9}{2} \ .$$

等式の左辺を $x^2+\square x+\left(\frac{\square}{2}\right)^2=x^2+2\frac{\square}{2}x+\left(\frac{\square}{2}\right)^2=\left(x+\frac{\square}{2}\right)^2$ のような形にします．そのために $x$ の係数 5 の $\frac{1}{2}$ の 2 乗 $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ を両辺に足します：

$$x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=-\frac{9}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2 ,$$

するとこの等式の左辺は $x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=x^2+2\cdot\frac{5}{2}\cdot x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2$ で，右辺は $-\frac{9}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2=-\frac{9}{2}+\frac{25}{4}=\frac{7}{4}$ ですから，

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{7}{4} \ .$$

定理 1.8.2 より $\frac{7}{4}=\sqrt{\frac{7}{4}}^{\,2}$ なので，

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\sqrt{\frac{7}{4}}^{\,2} \ .$$

定理 1.3.2 より，

$$x+\frac{5}{2}=\pm\sqrt{\frac{7}{4}}=\pm\frac{\sqrt{7}}{2} \ .$$

両辺から $\frac{5}{2}$ を引くと

$$x=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}-\frac{5}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{7}}{2}=-\frac{5\pm\sqrt{7}}{2} \ .$$

このように等式 $2x^2+10x+9=0$ から等式 $x=-\frac{5\pm\sqrt{7}}{2}$ が導かれて，この間に現れる等式は元の方程式と同値です：

$$\begin{aligned}
2x^2+10x+9=0 &\iff x^2+5x+\frac{9}{2}=0 \iff x^2+5x=-\frac{9}{2}\\
&\iff x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=-\frac{9}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2\\
&\iff x^2+2\cdot\frac{5}{2}\cdot x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{7}{4} \iff \left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\sqrt{\frac{7}{4}}^{\,2}\\
&\iff x+\frac{5}{2}=\pm\sqrt{\frac{7}{4}} \iff x=-\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\\
&\iff x=-\frac{5\pm\sqrt{7}}{2} \ .
\end{aligned}$$

故に，$x$ に関する方程式 $2x^2+10x+9=0$ を解くと $x=-\frac{5\pm\sqrt{7}}{2}$ ．　$\boxed{\text{終}}$

2 次方程式が解は虚数になることもあります．1.8 節において負の数の根号の定義を述べました：実数 $a$ について，$a<0$ のとき $\sqrt{a}=\sqrt{-a}\,i$ ．

$\boxed{\text{例解}}$　複素数を表す変数 $x$ に関する 2 次方程式 $4x^2-12x+29=0$ を解きます．まず $x^2$ の係数を 1 にするために両辺を 4 で割って

$$x^2-3x+\frac{29}{4}=0 ,$$

両辺から $\frac{29}{4}$ を引いて

$$x^2-3x=-\frac{29}{4} \ .$$

等式の左辺を $x^2-\square x+\left(\frac{\square}{2}\right)^2=x^2+2\frac{\square}{2}x+\left(\frac{\square}{2}\right)^2=\left(x-\frac{\square}{2}\right)^2$ のような形にするために，両辺に $\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$ を足します：

$$x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{29}{4}+\frac{9}{4} ,$$

左辺は $x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=x^2-2\cdot\frac{3}{2}\cdot x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$ で，右辺は定理 1.8.2 より $-\frac{29}{4}+\frac{9}{4}=-5=\sqrt{-5}^{\,2}$ なので，

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\sqrt{-5}^{\,2} \ .$$

定理 1.3.2 より

$$x-\frac{3}{2}=\pm\sqrt{-5} \ ;$$

1.8 節で述べたように $\sqrt{-5}=\sqrt{-(-5)}\,i=\sqrt{5}\,i$ なので，

$$x-\frac{3}{2}=\pm\sqrt{5}\,i ,$$

$$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{5}\,i \ .$$

このように等式 $2x^2-6x+\frac{29}{2}=0$ から等式 $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{5}\,i$ が導かれて，この間に現れる等式は元の方程式と同値です：

$$\begin{aligned}
4x^2-12x+29=0 &\iff x^2-3x+\frac{29}{4}=0 \iff x^2-3x=-\frac{29}{4}\\
&\iff x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{29}{4}+\left(\frac{3}{2}\right)^2\\
&\iff x^2-2\cdot\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=-5\\
&\iff \left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\sqrt{-5}^{\,2} \iff x-\frac{3}{2}=\pm\sqrt{-5}\\
&\iff x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{5}\,i \ .
\end{aligned}$$

つまり $x$ に関する方程式 $4x^2-12x+29=0$ を解くと $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{5}\,i$ ．　$\boxed{\text{終}}$

このような方法で 2 次方程式を解くとき，導かれる等式は総て元の方程式と同値です．ですから導かれた結果は元の方程式と同値です．

$\boxed{\text{例題}}$　複素数を表す変数 $x$ に関する方程式 $5x^2=2-6x$ を解く．

方程式 $5x^2=2-6x$ より，

$$\begin{gathered}
5x^2+6x=2 ,\\
x^2+\frac{6}{5}x=\frac{2}{5} ,\\
x^2+2\cdot\frac{3}{5}x+\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{2}{5}+\frac{9}{25}=\frac{19}{25} ,\\
\left(x+\frac{3}{5}\right)^2=\sqrt{\frac{19}{25}}^{\,2} ,\\
x+\frac{3}{5}=\pm\sqrt{\frac{19}{25}}=\pm\frac{\sqrt{19}}{5} ,
\end{gathered}$$

故に $x=-\frac{3\pm\sqrt{19}}{5}$ ．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.2.1}}$　複素数を表す変数 $x$ に関する方程式 $3x^2=1-5x$ を解きなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　複素数を表す変数 $x$ に関する方程式 $x^2+34=10x$ を解く．

方程式 $x^2+34=10x$ より，

$$\begin{gathered}
x^2-10x=-34 ,\\
x^2-2\cdot 5x+5^2=-9 ,\\
(x-5)^2=\sqrt{-9}^{\,2} ,\\
x-5=\pm\sqrt{-9}=\pm\sqrt{9}\,i=\pm 3i ,
\end{gathered}$$

故に $x=5\pm 3i$ ．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.2.2}}$　複素数を表す変数 $x$ に関する方程式 $3x^2+\frac{20}{3}=8x$ を解きなさい．

定理 1.1.1 を複素数で考えます：任意の複素数 $\alpha$ と $\beta$ とについて

$$\alpha\beta=0 \iff \alpha=0 \text{ または } \beta=0 \quad .$$

このことを用いて 2 次方程式を解きます．

$\boxed{\text{例題}}$　実数を表す定数 $k$ に対して，実数を表す変数 $x$ に関する方程式 $x^2+(3k-2)x+6k-8=0$ を解く．

〔解説〕 $x$ の 2 次式 $x^2+(3k-2)x+6k-8$ は $k$ についてみると高々 1 次の式なので，$k$ について整理して因数分解する：

$$\begin{aligned}
x^2+(3k-2)x+6k-8 &= (3x+6)k+x^2-2x-8=3(x+2)k+(x+2)(x-4)\\
&= (x+2)(3k+x-4)=(x+2)(x+3k-4) \ .
\end{aligned}$$

従って，定理 1.1.1 を用いると，

$$\begin{aligned}
x^2+(3k-2)x+6k-8=0 &\iff (x+2)(x+3k-4)=0\\
&\iff x+2=0 \text{ または } x+3k-4=0\\
&\iff x=-2 \text{ または } x=-3k+4 \ .
\end{aligned}$$

$x$ に関する方程式 $x^2+(3k-2)x+6k-8=0$ の解は $-2$ と $-3k+4$ とである．

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.2.3}}$　実数を表す定数 $a$ に対して，実数を表す変数 $x$ に関する方程式 $2x^2=(4a+1)x-6a+3$ を解きなさい．

与えられた方程式の解を求めてきましたが，逆に与えられた数を解とする方程式を求めることを考えます．定理 1.1.1 を用います：任意の複素数 $\alpha$ と $\beta$ とについて，

$$\alpha=0 \text{ または } \beta=0 \iff \alpha\beta=0 \quad .$$

$\boxed{\text{例題}}$　3 と $-2$ とを解とする $x$ に関する 2 次方程式を一つ求める．

〔解説〕 $x$ に関する方程式の解が 3 と $-2$ とであることは，方程式を解いた結果が“ $x=3$ または $x=-2$ ”となることである．

$$\begin{aligned}
x=3 \text{ または } x=-2 &\iff x-3=0 \text{ または } x+2=0\\
&\iff (x-3)(x+2)=0\\
&\iff x^2-x-6=0 \ .
\end{aligned}$$

3 と $-2$ とを解とする $x$ に関する 2 次方程式の一つは $x^2-x-6=0$ である．

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.2.4}}$　$-\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ と $-\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ とを解とする $x$ に関する 2 次方程式を一つ求めなさい．右辺は 0 にして，左辺は降冪の順に整理された $x$ の 2 次式にしなさい．