

§3.3 2次方程式の解の公式

2次方程式について、前節で述べた解法によって解の公式が導かれます。

定理 (2次方程式の解の公式) 実数を表す定数 a, b, c ($a \neq 0$) について、複素数を表す変数 x に関する2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ を解くと
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} .$$

2次方程式の解の公式を導きます。定数 a, b, c は実数で $a \neq 0$ とします。

複素数を表す変数 x について $ax^2 + bx + c = 0$ と仮定します。まず両辺から c を引いて両辺を a で割ります：

$$\begin{aligned} ax^2 + bx &= -c, \\ x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a}. \end{aligned}$$

等式の左辺を $x^2 + \square x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot \frac{\square}{2}x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{\square}{2}\right)^2$ のような形にするために、両辺に $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ を足します：

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 ;$$

この等式の左辺は $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, 右辺は

$$-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} ,$$

よって

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} .$$

右辺も2乗の形に変形します。定理1.8.2より $b^2 - 4ac = \sqrt{b^2 - 4ac}^2$ なので、

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}^2}{(2a)^2} = \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 ,$$

よって

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 .$$

定理1.3.2より

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} ,$$

従って

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} .$$

このように等式 $ax^2 + bx + c = 0$ から等式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ が導かれますが、その途中の等式は元の方程式と同値です：

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\iff ax^2 + bx = -c \iff x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \\ &\iff x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ &\iff x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ &\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ &\iff x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \iff x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &\iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} . \end{aligned}$$

故に、 x に関する方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ を解くと $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ です。

例題 複素数を表す変数 x に関する方程式 $2x^2 + \sqrt{29}x + 3 = 0$ を解く。

2次方程式の解の公式より

$$x = \frac{-\sqrt{29} \pm \sqrt{\sqrt{29}^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{4} = \frac{-\sqrt{29} \pm \sqrt{29 - 24}}{4} = \frac{-\sqrt{29} \pm \sqrt{5}}{4} .$$

よって $x = -\frac{\sqrt{29} \pm \sqrt{5}}{4}$.

終

1.8節において負の数の根号の定義を述べました：実数 a について、 $a < 0$ のとき $\sqrt{a} = \sqrt{-a}i$.

例題 複素数を表す変数 x に関する方程式 $3x^2 = 5x - 4$ を解く。

方程式 $3x^2 = 5x - 4$ を整理すると $3x^2 - 5x + 4 = 0$. 2次方程式の解の公式より、

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 48}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{-23}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{-(-23)}i}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{23}i}{6} .$$

終

問題 3.3.1 複素数を表す変数 x に関する以下の方程式を解きなさい。

$$(1) 2(x^2 + 3) = 3\sqrt{7}x . \quad (2) \frac{\sqrt{3}x^2}{2} + 2x = -\frac{2}{\sqrt{3}} . \quad (3) (x+1)(3x+1) = -2 .$$

定数 a, b, c は実数で $a \neq 0$ とします。複素数を表す変数 x に関する2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ をなるべく簡単に計算するために、できるならば、根号の中の b^2 と $4ac$ とが絶対値が小さい整数になるように予め方程式を変形します。

例題 複素数を表す変数 x に関する方程式 $9x^2 - 30x + 19 = 0$ を解く。まず両辺を6で割る。

与えられた方程式の両辺を6で割ると $\frac{3}{2}x^2 - 5x + \frac{19}{6} = 0$; 2次方程式の解の公式より

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{19}{6}}}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 19}}{3} = \frac{5 \pm \sqrt{6}}{3} .$$

終

問題 3.3.2 複素数を表す変数 x に関する方程式 $25x^2 - 70x + 46 = 0$ を解きなさい。まず両辺を10で割りなさい。

特に、定数 a, c が整数で $a \neq 0$ で、定数 b が偶数であるとき、複素数を表す変数 x に関する2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は次のようになります： $b' = \frac{b}{2}$ は整数なので、両辺を2で割ると $\frac{a}{2}x^2 + b'x + \frac{c}{2} = 0$, 解の公式より

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - 4 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{c}{2}}}{2 \cdot \frac{a}{2}} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} .$$

係数に文字が含まれる方程式を解きます。

例題 実数を表す定数 a に対して、複素数を表す変数 x に関する方程式 $(x+a)^2 = a^2 + 3$ を解く。

方程式 $(x+a)^2 = a^2 + 3$ を整理すると $x^2 + 2ax - 3 = 0$. 解の公式より、

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 + 12}}{2} = \frac{-2a \pm \sqrt{4(a^2 + 3)}}{2} = \frac{-2a \pm 2\sqrt{a^2 + 3}}{2} \\ &= -a \pm \sqrt{a^2 + 3} . \end{aligned}$$

終

問題 3.3.3 実数を表す定数 k に対して、複素数を表す変数 x に関する方程式 $x^2 - 2x = k(x-1)$ を解きなさい。