

§3.4 2次方程式の判別式

定数 a, b, c は実数を表し $a \neq 0$ とします. 便宜的に $D = b^2 - 4ac$ とおきます. 前節で述べたように, 複素数を表す変数 x に関する2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{と} \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{と}$$

です. そこで, 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ には本来2個の解 $\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ と $\frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ とがあると考えます. $\frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ のとき, 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は一つだけですが, これは本来2個ある解がたまたま重なって一つになったものと考えます. このようにたまたま一つなるときの解を重解あるいは2重解といいます.

$$\begin{aligned} \text{2次方程式 } ax^2 + bx + c = 0 \text{ の解が重解である} &\iff \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \\ &\iff -b + \sqrt{D} = -b - \sqrt{D} \\ &\iff 2\sqrt{D} = 0 \\ &\iff \sqrt{D} = 0; \end{aligned}$$

$\sqrt{D} = 0$ ならば, $\sqrt{D}^2 = 0$, 定理1.8.2より $\sqrt{D}^2 = D$ なので $D = 0$. 逆に, $D = 0$ ならば $\sqrt{D} = \sqrt{0} = 0$. よって

$$\sqrt{D} = 0 \iff D = 0.$$

こうして次のことが分かります:

$$\text{2次方程式 } ax^2 + bx + c = 0 \text{ の解が重解である} \iff D = 0.$$

複素数を表す変数 x に関する2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解が重解でないとき, つまり $\frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \neq \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ のとき, 方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ は異なる2個の解を持つといいます.

$$\begin{aligned} \text{2次方程式 } ax^2 + bx + c = 0 \text{ は異なる2個の解を持つ} \\ \iff \text{2次方程式 } ax^2 + bx + c = 0 \text{ の解は重解でない} \\ \iff D \neq 0. \end{aligned}$$

複素数を表す変数 x に関する2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2個の解

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

が実数であるか虚数であるかを考えます. $D \geq 0$ のとき, \sqrt{D} は実数ですから, 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2個の解 $\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ はどちらも実数です. つまり次のようになります:

$D \geq 0$ ならば2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2個の解はどちらも実数である. $D < 0$ のときは, 1.8節で述べた定義より $\sqrt{D} = i\sqrt{-D}$ ですから, 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2個の解は

$$\frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b + i\sqrt{-D}}{2a}, \quad \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - i\sqrt{-D}}{2a}.$$

$D < 0$ のとき, $-D > 0$ なので, 定理1.6.4より $\sqrt{-D} > 0$, 定理1.5.3より $\sqrt{-D} \neq 0$; 従って2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2個の解 $\frac{-b + i\sqrt{-D}}{2a}, \frac{-b - i\sqrt{-D}}{2a}$ はどちらも虚数です¹⁾. つまり次のようになります:

$D < 0$ ならば2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2個の解はどちらも虚数である. この述語の対偶(0.6節参照)をとります:

“2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2個の解はどちらも虚数” でなければ $D \not< 0$. 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2個の解がどちらも実数ならば, “2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2個の解がどちらも虚数” でないので, $D \not< 0$ つまり $D \geq 0$ です²⁾. つまり次のようになります:

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2個の解がどちらも実数であるならば $D \geq 0$. このようにして次のことが分かります:

$$\begin{aligned} D \geq 0 &\iff \text{2次方程式 } ax^2 + bx + c = 0 \text{ の2個の解はどちらも実数である;} \\ D < 0 &\iff \text{2次方程式 } ax^2 + bx + c = 0 \text{ の2個の解はどちらも虚数である.} \end{aligned}$$

このように, $D = b^2 - 4ac$ の符号を調べると, 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解が実数か虚数か, 重解かどうか, が分かります.

定理 3.4 定数 a, b, c は実数を表し $a \neq 0$ とする. 複素数を表す変数 x に関する2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ について,

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 \text{ が異なる2個の実数解を持つ} &\iff b^2 - 4ac > 0, \\ ax^2 + bx + c = 0 \text{ が1つの実数解(重解)を持つ} &\iff b^2 - 4ac = 0, \\ ax^2 + bx + c = 0 \text{ が異なる2個の虚数解を持つ} &\iff b^2 - 4ac < 0. \end{aligned}$$

定数 a, b, c が実数で $a \neq 0$ のとき, 複素数を表す変数 x に関する2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ に対して $b^2 - 4ac$ を**判別式**といいます.

例題 実数を表す定数 c について以下のそれぞれのときに, 複素数を表す変数 x に関する方程式 $3x^2 - 8x + c = 0$ が, 異なる2個の実数を解とするか, 解が重解であるか, 異なる2個の虚数を解とするか, 調べる.

$$(1) \quad c = 5 \text{ のとき.} \qquad (2) \quad c = 7 \text{ のとき.}$$

【解答】

(1) $c = 5$ のとき, 方程式は $3x^2 - 8x + 5 = 0$, この方程式の判別式の値は $(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 64 - 60 > 0$. 故に $c = 5$ のとき与えられた方程式は異なる2個の実数を解とする.

(2) $c = 7$ のとき, 方程式は $3x^2 - 8x + 7 = 0$, この方程式の判別式の値は $(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7 = 64 - 84 < 0$. 故に $c = 7$ のとき与えられた方程式は異なる2個の虚数を解とする. [終]

問題 3.4 実数を表す定数 b について以下のそれぞれのときに, 複素数を表す変数 x に関する方程式 $2x^2 + bx + 8 = 0$ が, 異なる2個の実数を解とするか, 解が重解であるか, 異なる2個の虚数を解とするか, 調べなさい.

$$(1) \quad b = 5 \text{ のとき.} \qquad (2) \quad b = 8 \text{ のとき.} \qquad (3) \quad b = 9 \text{ のとき.}$$

¹⁾ 実数 a と b について, $b \neq 0$ のとき複素数 $a + ib$ は虚数です(定理1.9.3).

²⁾ 任意の実数 a と b について, $a \not< b \iff a \geq b$ (法則1.5.2).