§3.5　2次式の因数分解

定数 a, b, c は実数を表し $a \neq 0$ とします． 前節で述べたように，複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ には 2 個の解 $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ と $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ とがあります． これら 2 個の解の和と積とを計算してみます． まず，2 個の解の和は

$$\begin{aligned}\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} \\ &= -\frac{b}{a}\ .\end{aligned}$$

2 個の解の積は，定理 3.2.2 より $\sqrt{b^2-4ac}^{\,2} = b^2-4ac$ なので，

$$\begin{aligned}\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} &= \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a\cdot 2a} \\ &= \frac{(-b)^2-\sqrt{b^2-4ac}^{\,2}}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a}\ .\end{aligned}$$

こうして次のことが分かります：2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 個の解を α と β とおくと，

$$\alpha+\beta = -\frac{b}{a}\ , \qquad \alpha\beta = \frac{c}{a}\ .$$

このことは a, b, c が虚数であってもそのまま成り立ちます．

定理（2 次方程式の解と係数の関係）　定数 a, b, c は複素数を表し $a \neq 0$ とする． 複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 個の解を α と β とおくと，

$$\alpha+\beta = -\frac{b}{a} \text{ かつ } \alpha\beta = \frac{c}{a}\ .$$

例題　複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $3x^2+5x+8=0$ の 2 個の解を α と β とおく． $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$ の値を計算する．

2 次方程式 $3x^2+5x+8=0$ の解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta = -\frac{5}{3} \text{ かつ } \alpha\beta = \frac{8}{3}\ .$$

これより，

$$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha+\beta) = \frac{8}{3}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{40}{9}\ .$$

終

問題 3.5.1　複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $3x^2+8x+5=0$ の 2 個の解を α と β とおきます． $(\alpha-3)(\beta-3)$ の値を計算しなさい．

2 次方程式の解と係数の関係より次の定理が導かれます．

> **定理**（2 次式の因数分解の公式）　定数 a, b, c は複素数を表し $a \neq 0$ とする． 複素数を表す定数 x に関する 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 個の解を α と β とおくと，x の 2 次式 ax^2+bx+c は次のように因数分解できる：
>
> $$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)\ .$$

証明　2 次方程式の解と係数の関係 $\alpha+\beta = -\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$ より

$$b = -a(\alpha+\beta)\ , \quad c = a\alpha\beta\ .$$

これより

$$ax^2+bx+c = ax^2-a(\alpha+\beta)+a\alpha\beta = a\{x^2-(\alpha+\beta)+\alpha\beta\} = a(x-\alpha)(x-\beta)\ .$$

（証明終り）

この定理によると， 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解が分かれば， 2 次式 ax^2+bx+c が 1 次式の積に因数分解できます． 2 次方程式はいつも複素数の解を持ちますから，2 次式は係数が複素数の範囲で必ず 1 次式の積の形に因数分解できます．

例題　係数が実数の範囲で x の 2 次式 $3x^2+9x+5$ を因数分解する．

〔方針〕 実数の範囲で x に関する 2 次方程式 $3x^2+9x+5=0$ を解いて，2 次式の因数分解の公式を用いる．

〔解説〕 実数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $3x^2+9x+5=0$ を解く． 解の公式より，

$$x = \frac{-9\pm\sqrt{81-60}}{6} = \frac{-9\pm\sqrt{21}}{6} = -\frac{9\pm\sqrt{21}}{6}\ .$$

2 次方程式 $3x^2-9x+5=0$ の解は $-\dfrac{9+\sqrt{21}}{6}$ と $-\dfrac{9-\sqrt{21}}{6}$ となので，x の 2 次式 $3x^2-9x+5$ は次のように因数分解できる：

$$\begin{aligned}3x^2-9x+5 &= 3\left\{x-\left(-\frac{9+\sqrt{21}}{6}\right)\right\}\left\{x-\left(-\frac{9-\sqrt{21}}{6}\right)\right\} \\ &= 3\left(x+\frac{9+\sqrt{21}}{6}\right)\left(x+\frac{9-\sqrt{21}}{6}\right)\ .\end{aligned}$$

終

問題 3.5.2　係数が実数の範囲で以下の x の 2 次式を因数分解しなさい．

(1) $2x^2-6x+3$.　　(2) $\dfrac{1}{2}x^2+x-3$.

例題　係数が複素数の範囲で t の 2 次式 $2t^2-6t+5$ を因数分解する．

〔解説〕 複素数を表す変数 t に関する 2 次方程式 $2t^2-6t+5=0$ を解く． $t^2-3t+\dfrac{5}{2}=0$ なので，解の公式より，

$$t = \frac{3\pm\sqrt{9-10}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{-1}}{2} = \frac{3\pm i}{2}\ .$$

2 次方程式 $2t^2-6t+5=0$ の解は $\dfrac{3+i}{2}$ と $\dfrac{3-i}{2}$ となので，

$$2t^2-6t+5 = 2\left(t-\frac{3+i}{2}\right)\left(t-\frac{3-i}{2}\right)\ .$$

終

問題 3.5.3　係数が複素数の範囲で以下の x の 2 次式を因数分解しなさい．

(1) $3x^2-8x+7$.　　(2) $2x^2+4x+\dfrac{5}{2}$.

例題　係数が複素数の範囲で x の 3 次式 $2x^3-2x^2-5x+2$ を因数分解する．

〔解説〕 $x=2$ のとき $2x^3-2x^2-5x+2=0$ なので，因数定理より，$2x^3-6x^2+3x+2$ は $x-2$ で割り切れる． 実際に割ると整商は $2x^2+2x-1$ なので，

$$2x^3-2x^2-5x+2 = (x-2)(2x^2+2x-1)\ .$$

$$\begin{array}{r} 2x^2+2x-1 \\ x-2\ \overline{)\ 2x^3-2x^2-5x+2} \\ \underline{2x^3-4x^2} \\ 2x^2-5x \\ \underline{2x^2-4x} \\ -x+2 \\ \underline{-x+2} \\ 0 \end{array}$$

複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $2x^2+2x-1=0$ つまり $x^2+x-\dfrac{1}{2}=0$ を解くと

$$x = \frac{-1\pm\sqrt{1-(-2)}}{2} = -\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}\ .$$

2 次方程式 $2x^2+2x-1=0$ の解は $-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ と $-\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ となので，

$$\begin{aligned}2x^2-2x-1 &= 2\left\{x-\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\right\}\left\{x-\left(-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\right\} \\ &= 2\left(x+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\ .\end{aligned}$$

故に

$$\begin{aligned}2x^3-6x^2+3x+2 &= (x-2)(2x^2-2x-1) \\ &= (x-2)\,2\left(x+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 2(x-2)\left(x+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\ .\end{aligned}$$

終

問題 3.5.4　係数が複素数の範囲で y の整式 $3y^3-3y^2-2y+4$ を因数分解しなさい．

係数が実数の 2 次式の因数分解について，2 次式の因数分解の公式と前節の定理 3.4 とを組み合わせると次の定理が導かれます（証明は省きます）．

定理 3.5　定数 a, b, c が実数を表し， $a \neq 0$ のとき，

x の 2 次式 ax^2+bx+c が係数が実数の範囲で 1 次式の積の形に因数分解できる

$\iff \quad b^2-4ac \geq 0$.