§3.6　整方程式

x の整式 $P(x)$ について，x に関する方程式で $P(x)=0$ の形に整理できるものを整方程式といいます． x の整式 $P(x)$ が n 次式であるとき，x に関する方程式で $P(x)=0$ の形に整理できるものを n 次方程式といいます． つまり，1 次方程式，2 次方程式，3 次方程式，$\cdots$ を併せて整方程式といいます．

3 以上の次数の整方程式を解く方法の一つは因数分解することです． そのために 2.4 節で述べた因数定理をよく用います：x の整式 $P(x)$ 及び任意の複素数 α について

$$P(\alpha)=0 \iff 1\text{ 次式 } x-\alpha \text{ は } P(x) \text{ の因数である} \quad .$$

定数 α 及び x の整式 $P(x)$ について次のことがいえました：

$$\alpha \text{ が } x \text{ に関する方程式 } P(x)=0 \text{ の解である} \iff P(\alpha)=0 \quad .$$

故に，任意の整式 $P(x)$ 及び任意の複素数 α について次の 3 条件は互いに同値になります：

(1)　$P(\alpha)=0$ ；

(2)　$x-\alpha$ は $P(x)$ の因数である；

(3)　α は x の方程式 $P(x)=0$ の解である．

定理 1.1.1 を複素数で考えます：任意の複素数 α と β とについて

$$\alpha\beta=0 \iff \alpha=0 \text{ または } \beta=0 \quad .$$

このことを用いて 3 次方程式を解きます．

$\boxed{\text{例解}}$　因数分解によって複素数を表す変数 x に関する 3 次方程式 $x^3+3x^2-3x-5=0$ を解きます． $x=-1$ のとき $x^3+3x^2-3x-5=0$ ですから，因数定理より，整式 x^3+3x^2-3x-5 は $x+1$ で割り切れます． 実際に割ると整商は x^2+2x-5 です：

$$x^3+3x^2-3x-5=(x+1)(x^2+2x-5) \ .$$

$$\begin{array}{r|l} & x^2+2x-5 \\ \hline x+1 & x^3+3x^2-3x-5 \\ & x^3+\ x^2 \\ \hline & \qquad 2x^2-3x \\ & \qquad 2x^2+2x \\ \hline & \qquad\quad -5x-5 \\ & \qquad\quad -5x-5 \\ \hline & \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

定理 1.1.1 を用いると

$$\begin{aligned} x^3+3x^2-3x-5=0 &\iff (x+1)(x^2+2x-5)=0 \\ &\iff x+1=0 \text{ または } x^2+2x-5=0 \quad . \end{aligned}$$

2 次方程式 $x^2+2x-5=0$ を解きます：$\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{5}{2}=0$ ですから，解の公式より，

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+5}}{1}=-1\pm\sqrt{6} \ ;$$

従って

$$x^2+2x-5=0 \iff x=-1+\sqrt{6} \text{ または } x=-1-\sqrt{6} \ .$$

故に

$$\begin{aligned} x^3+3x^2-3x-5=0 &\iff x+1=0 \text{ または } x^2+2x-5=0 \\ &\iff x=-1 \text{ または } x=-1+\sqrt{6} \text{ または } x=-1-\sqrt{6} \quad . \end{aligned}$$

つまり，3 次方程式 $x^3+3x^2-3x-5=0$ の解は -1 と $-1+\sqrt{6}$ と $-1-\sqrt{6}$ との 3 個です． $\boxed{\text{終}}$

一般的に議論します． x の 3 次式 $A(x)$ に対して， $A(\alpha)=0$ となる複素数 α が見つかったとします． すると，因数定理より，$A(x)$ は $x-\alpha$ で割り切れます． $A(x)$ を $x-\alpha$ で割った整商を $B(x)$ とおきます：

$$A(x)=(x-\alpha)B(x) \ .$$

定理 1.1 より

$$A(x)=0 \iff (x-\alpha)B(x)=0 \iff x-\alpha=0 \text{ または } B(x)=0 \quad .$$

3 次式 $A(x)$ を 1 次式 $x-\alpha$ で割った整商 $B(x)$ は 2 次式です． 従って方程式 $B(x)=0$ は 2 次方程式です． この 2 次方程式を解くと，3 次方程式 $A(x)=0$ の α 以外の解を求めることができます．

$\boxed{\text{例題}}$　複素数を表す変数 t に関する 3 次方程式 $t^3-t+6=0$ を解く．

〔解説〕 $t=-2$ のとき $t^3-t+6=0$ なので，因数定理より，整式 t^3-t+6 は $t+2$ で割り切れる：

$$t^3-t+6=(t+2)(t^2-2t+3) \ .$$

方程式 $t^3-t+6=0$ より $(t+2)(t^2-2t+3)=0$ なので，

$$t+2=0 \text{ または } t^2-2t+3=0 \ .$$

2 次方程式 $t^2-2t+3=0$ を解く：$\dfrac{1}{2}t^2-t+\dfrac{3}{2}=0$ なので，解の公式により，

$$t=\frac{1\pm\sqrt{1-3}}{1}=1\pm\sqrt{-2}=1\pm\sqrt{2}i \ .$$

従って，与えられた方程式の解は $-2, 1\pm\sqrt{2}i$ ． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.6.1}}$　複素数を表す変数 x に関する以下の方程式を解きなさい．

(1) $3x^3=x(5x+2)$ ．　(2) $2x^2(x-1)=7x-6$ ．　(3) $x^3=-8$ ．

定理 1.1.1 より更に次のことが導かれます：任意の複素数 α と β と γ とについて，

$$\alpha\beta\gamma=0 \iff \alpha=0 \text{ または } \beta=0 \text{ または } \gamma=0 \quad .$$

$\boxed{\text{例題}}$　4 と -2 と -3 とを解とする x に関する 3 次方程式を一つ求める．

〔解説〕 x に関する方程式の解が 4 と -2 と -3 とであることは，方程式を解いた結果が“ $x=4$ または $x=-2$ または $x=-3$ ”となることである．

$$\begin{aligned} & x=4 \text{ または } x=-2 \text{ または } x=-3 \\ \iff & x-4=0 \text{ または } x+2=0 \text{ または } x+3=0 \\ \iff & (x-4)(x+2)(x+3)=0 \iff (x^2-2x-8)(x+3)=0 \\ \iff & x^3+x^2-14x-24=0 \ . \end{aligned}$$

4 と -2 と -3 とを解とする x に関する 3 次方程式の一つは $x^3+x^2-14x-24=0$ である． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.6.2}}$　-2 と $3+\sqrt{7}$ と $3-\sqrt{7}$ とを解とする x に関する 3 次方程式を一つ求めなさい． 右辺は 0 にして，左辺は降冪の順に整理された x の 3 次式にしなさい．

―――― 代数学の基本定理

私達はこれまで，方程式が解を持つように，有理数から実数へ，更に複素数へと，数の範囲を拡張してきました． そして，係数が実数である 2 次方程式は，複素数の範囲で必ず解があることが分かりました． それでは，係数が複素数である 2 次方程式ではどうなるのでしょうか． さらに，3 次方程式や 4 次方程式などではどうなるのでしょうか． そのような方程式の解を考えるためには，数の範囲を更に拡張しなければならないのでしょうか．

実は，係数が複素数である整方程式は，次数がいくら高くても，必ず複素数の解があります． この事実を代数学の基本定理といいます． それは 19 世紀前半の大数学者ガウスによって証明されました．

定理（代数学の基本定理）　係数が複素数である任意の整方程式には複素数の解がある．

この代数学の基本定理によると，整方程式を解くという要求に関する限り，複素数の範囲内で総て間に合うことになります．

但し，方程式が解を持つことと，その方程式の解を実際に求めることができることとは，別のことです． 方程式が解を持つことが分かっていても，実際にはその解を求めることができないこともあります．