

### 第3章の補遺1 複素数の平方根

1.6節で述べたように、数  $a$  に対して、 $x^2 = a$  となる数  $x$  を  $a$  の平方根といいます。1.8節で述べたように、実数の範囲では  $-1$  の平方根はありません。このように、実数の範囲で考えると、任意の実数に対してその平方根があるとはいえません。しかし、複素数の範囲で考えると、任意の複素数に対してその平方根があります。

**例解** 複素数  $5 - 12i$  の平方根を求めます。  $5 - 12i$  の平方根を  $x + iy$  ( $x, y$  は実数) とおきます：

$$(x + iy)^2 = 5 - 12i .$$

$(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$  ですから

$$x^2 - y^2 + 2ixy = 5 - 12i .$$

$x$  と  $y$  とは実数ですから、 $x^2 - y^2$  及び  $2xy$  も実数です。従って定理1.9.1より、

$$x^2 - y^2 = 5 \quad \text{かつ} \quad 2xy = -12 .$$

この連立方程式を解きます。  $x^2 - y^2 = 5$  の両辺に  $x^2$  を掛けて

$$x^4 - x^2y^2 = 5x^2 ,$$

$$x^4 - (xy)^2 = 5x^2 ,$$

$xy = -6$  なので

$$x^4 - (-6)^2 = 5x^2 ,$$

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0 ,$$

$x^2 = X$  とおくと

$$X^2 - 5X - 36 = 0 ,$$

$$X = 9 \quad \text{または} \quad X = -4 ,$$

$X = x^2$  ですから、 $x^2 = 9$  または  $x^2 = -4$  .  $x$  は実数ですから  $x^2 \geq 0$  , 従って  $x^2 = 9$  . よって

$$x = \pm 3 .$$

$xy = -6$  ですから、 $x = 3$  のとき  $y = -2$  ,  $x = -3$  のとき  $y = 2$  . 従って

$$x + iy = \pm 3 \mp 2i = \pm(3 - 2i) \quad \text{複号同順} .$$

故に、複素数  $5 - 12i$  の平方根は  $\pm(3 - 2i)$  です。

実際に  $\pm(3 - 2i)$  を 2 乗すると

$$\{\pm(3 - 2i)\}^2 = (3 - 2i)^2 = 9 - 4 - 12i = 5 - 12i .$$

**終**

**問題 3.補遺1** 複素数  $24 + 10i$  の平方根を求めなさい。