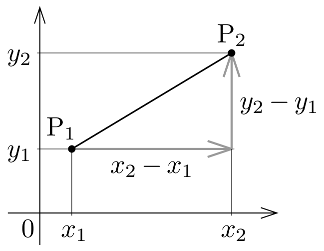
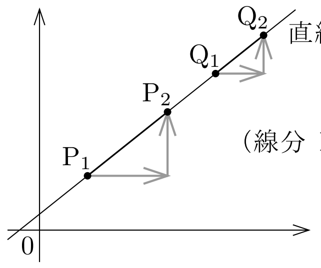
## §4.5　1次関数のグラフ




実数 $x_1,y_1,x_2,y_2$ について，$x_1\neq x_2$ のとき，座標平面における点 $\mathrm{P}_1=(x_1,y_1)$ と点 $\mathrm{P}_2=(x_2,y_2)$ とを結ぶ線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の**傾き**とは $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ の値つまり $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ の値のことです．座標平面における直線 $L$ に属する2点 $\mathrm{P}_1$ と $\mathrm{P}_2$（但し $\mathrm{P}_1\neq\mathrm{P}_2$）と，$L$ に属す2点 $\mathrm{Q}_1$ と $\mathrm{Q}_2$（但し $\mathrm{Q}_1\neq\mathrm{Q}_2$）とについて，線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の傾きと線分 $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2$ の傾きとは（あれば）同じです．つまり，直線 $L$ に含まれる線分はどれも傾きが（あれば）同じです：これを直線 $L$ の**傾き**といいます．




（線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の傾き）=（線分 $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2$ の傾き）=（直線 $L$ の傾き）

$\boxed{\text{例}}$　座標平面において点 $(5,7)$ と $(2,3)$ とが直線 $L$ に属すとき，$L$ の傾きは $\dfrac{7-3}{5-2}=\dfrac{4}{3}$ です．　$\boxed{\text{終}}$

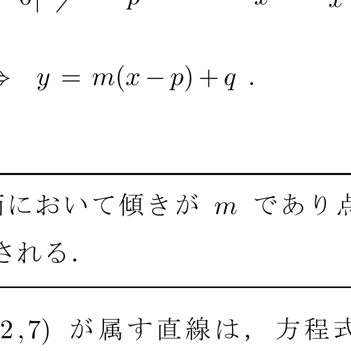
$\boxed{\text{問題 4.5.1}}$　座標平面において点 $(3,4)$ と $(5,9)$ とが直線 $L$ に属すとします．$L$ の傾きを求めなさい．

定数 $a,b$（但し $a\neq 0$）に対して変数 $x$ の1次関数 $y=ax+b$ を考えます．$xy$ 座標平面において1次関数 $y=ax+b$ のグラフは直線の部分集合です．実数 $x_1,y_1,x_2,y_2$（但し $x_1\neq x_2$）について，点 $\mathrm{P}_1=(x_1,y_1)$ と $\mathrm{P}_2=(x_2,y_2)$ とが1次関数 $y=ax+b$ のグラフに属すとき，$y_1=ax_1+b$ かつ $y_2=ax_2+b$ なので，線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の傾きは

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{(ax_1+b)-(ax_2+b)}{x_1-x_2}=\frac{a(x_1-x_2)}{x_1-x_2}=a\ .$$

このように，1次関数 $y=ax+b$ のグラフに属す相異なる2点 $\mathrm{P}_1$ と $\mathrm{P}_2$ とを結ぶ線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の傾きは常に $a$ です．このことから，1次関数 $y=ax+b$ のグラフは傾きが $a$ の直線の部分集合です[3]．

このように1次関数のグラフは直線の部分ですが，逆に傾きが 0 でない実数である直線は1次関数のグラフです．このことを示します．




定数 $m,p,q$ に対して，$xy$ 座標平面における直線 $L$ の傾きが $m$ であり点 $(p,q)$ が $L$ に属すとします．変数 $x,y$ について，$x\neq p$ とします．座標平面において点 $(x,y)$ が直線 $L$ に属す条件は，点 $(x,y)$ と点 $(p,q)$ とを結ぶ線分の傾き $\dfrac{y-q}{x-p}$ が $m$ になることです：$\dfrac{y-q}{x-p}=m$ ；この方程式を同値変形すると，$x-p\neq 0$ なので，

$$\frac{y-q}{x-p}=m \iff y-q=m(x-p) \iff y=m(x-p)+q\ .$$

このようにして次のことが分かります．

> **定理 4.5**　各定数 $m,p,q$ に対して，$xy$ 座標平面において傾きが $m$ であり点 $(p,q)$ が属す直線は方程式 $y=m(x-p)+q$ で表される．

$\boxed{\text{例}}$　$xy$ 座標平面において傾きが 3 であり点 $(2,7)$ が属す直線は，方程式 $y=3(x-2)+7$ つまり $y=3x+1$ で表されます．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.5.2}}$　$xy$ 座標平面において傾きが $-2$ であり点 $(3,-5)$ が属す直線を表す方程式を求めなさい．

$\boxed{\text{例}}$　$xy$ 座標平面において点 $(2,4)$ と点 $(5,13)$ とが属す直線は，傾きが $\dfrac{13-4}{5-2}=3$ なので，方程式 $y=3(x-2)+4$ つまり $y=3x-2$ で表されます．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.5.3}}$　$xy$ 座標平面において点 $(3,1)$ と点 $(7,9)$ とが属す直線を表す方程式を求めなさい．

---

[3] ここで証明は略しますが，関数のグラフに属す相異なる2点 $\mathrm{P}_1$ と $\mathrm{P}_2$ とを結ぶ線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の傾きが一定であるとき，そのグラフは直線の部分集合です．