§5.2　2次不等式の証明

変数 x に関する不等式が次の何れかの形に整理できるとき，その不等式を x に関する2次不等式といいます：

$$ax^2+bx+c<0\ ,\quad ax^2+bx+c\leq 0\ ,\quad ax^2+bx+c>0\ ,\quad ax^2+bx+c\geq 0\ ;$$

ここで定数 a,b,c は実数を表し $a\neq 0$ です．2次不等式の証明とは目標の2次不等式を導くことです．そのためによく用いられるのが定理1.5.10です：任意の実数 A について $A^2\geq 0$ ．

$\boxed{\text{例解}}$ 次のことを示します：任意の実数 x について $x^2-6x+11>0$ ．この不等式を導くために左辺の2次式を平方完成します．

$$x^2-6x+11=(x^2-2\cdot 3x+9)-9+11=(x-3)^2+2\ .$$

任意の実数 x について，$(x-3)^2\geq 0$ ですから

$$(x-3)^2+2\geq 2\ ,$$

$2>0$ ですから

$$(x-3)^2+2>0\ ,$$

$(x-3)^2+2=x^2-6x+11$ ですから

$$x^2-6x+11>0\ .$$

こうして目標の不等式 $x^2-6x+11>0$ が導かれました．　$\boxed{\text{終}}$

実数 a と b とについて，$a-b\geq 0$ ならば，法則1.5.3より $a-b+b\geq 0+b$ つまり $a\geq b$ です．同様に，$a-b>0$ ならば $a>b$ です．このように，任意の実数 a と b とについて次のようになります：

$$a-b\geq 0 \text{ ならば，}\quad a\geq b\ ,\ b\leq a\ ;$$
$$a-b>0 \text{ ならば，}\quad a>b\ ,\ b<a\ .$$

このことより次のことが分かります：

　不等式 $A\geq B$ ，$B\leq A$ を導くためには不等式 $A-B\geq 0$ を導けばよい；

　不等式 $A>B$ ，$B<A$ を導くためには不等式 $A-B>0$ を導けばよい．

$\boxed{\text{例題}}$ 次のことを示す：任意の実数 x について $2x^2+14>12x-5$ ．

〔方針〕不等式 $2x^2+14>12x-5$ を導くために不等式 $2x^2+14-(12x-5)>0$ を導く；そのために左辺の2次式 $2x^2+14-(12x-5)$ を平方完成する．

〔解答〕

$$\begin{aligned}2x^2+14-(12x-5)&=2x^2-12x+19=2(x^2-6x)+19\\&=2(x^2-6x+3^2-9)+19=2(x-3)^2-18+19\\&=2(x-3)^2+1\ .\end{aligned}$$

任意の実数 x について，$(x-3)^2\geq 0$ なので $2(x-3)^2\geq 0$ ，よって $2(x-3)^2+1\geq 1$ ；更に $1>0$ なので

$$2(x-3)^2+1>0\ ,$$

$2(x-3)^2+1=2x^2+14-(12x-5)$ なので，

$$2x^2+14-(12x-5)>0\ ,$$
$$2x^2+14>12x-5\ .$$

故に，任意の実数 x について $2x^2+14>12x-5$ ．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.2.1}}$ 次のことを示しなさい：任意の実数 x について $5x^2-8x+2>2x^2-5$ ．

このように，2次式の平方完成によって次の定理が導かれます．

> **定理 5.2**　定数 a,b,c は実数で $a\neq 0$ とする．
> $a>0$ かつ $b^2-4ac<0$ ならば，任意の実数 x について $ax^2+bx+c>0$ ．
> $a<0$ かつ $b^2-4ac<0$ ならば，任意の実数 x について $ax^2+bx+c<0$ ．

証明　“ $a>0$ かつ $b^2-4ac<0$ ならば，任意の実数 x について $ax^2+bx+c>0$ ”であることを証明する．

$a>0$ かつ $b^2-4ac<0$ と仮定する．x の2次式 ax^2+bx+c を平方完成する：

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left\{x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c\\&=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right\}+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c\\&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}\ .\end{aligned}$$

x を任意の実数とする．$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geq 0$ なので，仮定 $a>0$ より $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geq 0$ ，よって

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}\geq -\frac{b^2-4ac}{4a}\ .$$

仮定 $a>0$ かつ $b^2-4ac<0$ より $\frac{b^2-4ac}{4a}<0$ ，よって $-\frac{b^2-4ac}{4a}>0$ なので，

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}>0\ .$$

故に，任意の実数 x について，

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}>0\ .$$

（証明終り）

不等式 $A\geq B$ を証明したとき，等号が成り立つ（つまり $A=B$ となる）条件を調べることがあります．

$\boxed{\text{例題}}$ 任意の実数 y について $3y^2-7y+8\geq 5y-4$ であることを示し，等号が成り立つ（つまり $3y^2-7y+8=5y-4$ となる）条件を調べる．

〔方針〕不等式 $3y^2-7y+8\geq 5y-4$ を導くために不等式 $3y^2-7y+8-(5y-4)\geq 0$ を導く；そのために左辺の2次式 $3y^2-7y+8-(5y-4)$ を平方完成する．

〔解答〕

$$\begin{aligned}3y^2-7y+8-(5y-4)&=3y^2-12y+12=3(y^2-4y)+12\\&=3(y^2-4y+2^2-4)+12=3(y-2)^2-12+12\\&=3(y-2)^2\ .\end{aligned}$$

任意の実数 y について，$3(y-2)^2\geq 0$ なので

$$3y^2-7y+8-(5y-4)\geq 0\ ,$$

従って $3y^2-7y+8\geq 5y-4$ ．

等号が成り立つ条件は，$3y^2-7y+8=5y-4$ ，$3y^2-7y+8-(5y-4)=0$ ，$3(y-2)^2=0$ ，$y-2=0$ ，$y=2$ ．故に $y=2$ のときに限り $3y^2-7y+8=5y-4$ ．

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.2.2}}$ 任意の実数 t について $\frac{3}{4}t^2+t+2\geq\frac{1}{2}t^2-2t-7$ となることを示し，等号が成り立つ条件を調べなさい．

$\boxed{\text{例題}}$ 次のことを示しなさい：$3x^2+5\leq 7x$ である実数 x は無い．

〔方針〕“ $3x^2+5\leq 7x$ である実数 x は無い”を示すために，“任意の実数 x について $3x^2+5>7x$ ”を示す．

〔解説〕

$$\begin{aligned}3x^2+5-7x&=3\left(x^2-\frac{7}{3}x\right)+5=3\left\{x^2-2\cdot\frac{7}{6}x+\left(\frac{7}{6}\right)^2\right\}-\frac{49}{12}+5\\&=3\left(x-\frac{7}{6}\right)^2+\frac{11}{12}\ .\end{aligned}$$

任意の実数 x について，$\left(x-\frac{7}{6}\right)^2\geq 0$ なので，$3\left(x-\frac{7}{6}\right)^2+\frac{11}{12}\geq\frac{11}{12}>0$ ，$3x^2+5-7x>0$ ，よって $3x^2+5>7x$ ．故に $3x^2+5\leq 7x$ である実数 x は無い．

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.2.3}}$ 次のことを示しなさい：$3x^2+4\leq 5x$ である実数 x は無い．

2個の変数が現れる不等式を考えます．

$\boxed{\text{例題}}$ 次のことを示す：任意の実数 x と y とについて $2x^2+3y^2>3x+5y-4$ ．

〔解説〕$2x^2+3y^2-(3x+5y-4)$ を x および y について平方完成する．

$$\begin{aligned}&2x^2+3y^2-(3x+5y-4)=2x^2-3x+3y^2-5y+4\\&=2\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)+3\left(y^2-\frac{5}{3}y\right)+4\\&=2\left\{x^2-2\cdot\frac{3}{4}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\frac{3^2}{4^2}\right\}+3\left\{y^2-2\cdot\frac{5}{6}y+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{5^2}{6^2}\right\}+4\\&=2\left\{x^2-2\cdot\frac{3}{4}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}-\frac{9}{8}+3\left\{y^2-2\cdot\frac{5}{6}y+\left(\frac{5}{6}\right)^2\right\}-\frac{25}{12}+4\\&=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+3\left(y-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{19}{24}\ .\end{aligned}$$

任意の実数 x と y とについて，$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2\geq 0$ かつ $\left(y-\frac{5}{6}\right)^2\geq 0$ なので，

$$2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+3\left(y-\frac{5}{6}\right)^2\geq 0\ ,$$

$$2x^2+3y^2-(3x+5y-4)=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+3\left(y-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{19}{24}\geq\frac{19}{24}>0\ ,$$

よって $2x^2+3y^2>3x+5y-4$ ．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.2.4}}$ 次のことを示しなさい：任意の実数 x と y とについて $3x^2+4y^2>5x-3y-3$ ．