§5.3　根号・絶対値記号が現れる不等式

定理5.1.7を思い起こして下さい：任意の実数 a と b とについて，$a^2 < b^2$ かつ $b \geq 0$ ならば，$a < b$.

$\boxed{\text{例題}}$　3 と $\sqrt{7}$ との大小関係を調べる．
$3^2 = 9$ ，$\sqrt{7}^{\,2} = 7$ ．$\sqrt{7}^{\,2} < 3^2$ なので，$\sqrt{7} < 3$.　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.3.1}}$　7 と $4\sqrt{3}$ との大小関係を調べなさい．

$\boxed{\text{問題 5.3.2}}$　$\dfrac{13}{3}$ と $3\sqrt{2}$ との大小関係を調べなさい．

一般的に次の定理が成り立ちます．

定理 5.3.1　0 以上の実数 a, b について，

$$a < b \iff \sqrt{a} < \sqrt{b} \ ,$$
$$a \leq b \iff \sqrt{a} \leq \sqrt{b} \ .$$

証明　例として“ $a < b \iff \sqrt{a} < \sqrt{b}$ ”を証明する．$\sqrt{a} \geq 0$ ，$\sqrt{b} \geq 0$ ．また，定理1.6.2より，$\sqrt{a}^{\,2} = a$ ，$\sqrt{b}^{\,2} = b$ ．$a < b$ ならば，$\sqrt{a}^{\,2} < \sqrt{b}^{\,2}$ ，定理5.1.7より $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ ．逆に，$\sqrt{a} < \sqrt{b}$ ならば，定理5.1.6より $\sqrt{a}^{\,2} < \sqrt{b}^{\,2}$ つまり $a < b$.　（証明終り）

定理1.6.3を思い起こして下さい：$a \leq 0$ である任意の実数 a について $\sqrt{a^2} = -a$.

$\boxed{\text{例題}}$　$\left(\sqrt{7} - 3\right)^2$ を計算する．その結果を用いて $\sqrt{16 - 6\sqrt{7}}$ を計算する．

$$\left(\sqrt{7} - 3\right)^2 = \sqrt{7}^{\,2} - 2 \cdot 3\sqrt{7} + 3^2 = 7 - 6\sqrt{7} + 9 = 16 - 6\sqrt{7} \ .$$

$7 < 3^2$ なので $\sqrt{7} < \sqrt{3^2} = 3$ ，よって $\sqrt{7} - 3 < 0$ なので，

$$\sqrt{16 - 6\sqrt{7}} = \sqrt{\left(\sqrt{7} - 3\right)^2} = -\left(\sqrt{7} - 3\right) = 3 - \sqrt{7} \ .$$
$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.3.3}}$　$\left(2 - \sqrt{5}\right)^2$ を計算し，その結果を用いて $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$ を計算しなさい．

実数 a について，例えば $a = 5$ のとき，$|a| = |5| = 5$ なので $|a| = a$ です；また例えば $a = -3$ のとき，$|a| = |-3| = 3$ なので $|a| > a$ です．このように，$|a| = a$ となる場合と $|a| > a$ となる場合とがあります；両方の場合を併せると $|a| \geq a$ です．

定理 5.3.2　任意の実数 a について $a \leq |a|$.

証明　定理1.7.4より $|a|^2 = a^2$ なので，定理1.5.1より $|a|^2 \geq a^2$ ；更に $|a| \geq 0$ なので，定理5.1.7より $|a| \geq a$.　（証明終り）

実数 a と b とについて，

例えば $a = 5$ ，$b = 3$ のとき $|a + b| = 8 = |a| + |b|$ ，
例えば $a = 5$ ，$b = -3$ のとき $|a + b| = 2 < |a| + |b|$ ，
例えば $a = -5$ ，$b = 3$ のとき $|a + b| = 2 < |a| + |b|$ ，
例えば $a = -5$ ，$b = -3$ のとき $|a + b| = 8 = |a| + |b|$.

このように，$|a + b| = |a| + |b|$ または $|a + b| < |a| + |b|$ なので，$|a + b| \leq |a| + |b|$.

定理 5.3.3（三角不等式）　任意の実数 a と b とについて $|a + b| \leq |a| + |b|$.

証明

$$\begin{aligned}\left(|a| + |b|\right)^2 - |a + b|^2 &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2 \\ &= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) = 2|ab| - 2ab \\ &= 2\left(|ab| - ab\right) \ .\end{aligned}$$

定理5.3.2より $|ab| \geq ab$ なので $|ab| - ab \geq 0$ ，よって $2\left(|ab| - ab\right) \geq 0$ なので，

$$\left(|a| + |b|\right)^2 - |a + b|^2 \geq 0 \ ,$$
$$\left(|a| + |b|\right)^2 \geq |a + b|^2 \ .$$

$|a| \geq 0$ ，$|b| \geq 0$ より $|a| + |b| \geq 0$ ．$\left(|a| + |b|\right)^2 \geq |a + b|^2$ かつ $|a| + |b| \geq 0$ なので，定理5.1.7より $|a| + |b| \geq |a + b|$.　（証明終り）

$\boxed{\text{問題 5.3.4}}$　三角不等式の証明に倣って次のことを証明しなさい：任意の実数 a と b とについて $|a - b| \geq |a| - |b|$.

例えば，実数 x について，$|x| < 3$ となることは，x の値が -3 より大きく 3 より小さいことつまり $-3 < x < 3$ となることです：

$$|x| < 3 \iff -3 < x < 3 \ .$$

また例えば，実数 x について，$|x| > 3$ となることは，x の値が -3 より小さいかまたは 3 より大きいことです：

$$|x| > 3 \iff x < -3 \text{ または } x > 3 \ .$$

一般的に次の定理が成り立ちます．

定理 5.3.4　実数 a と b とについて，

$$|a| < b \iff -b < a < b \ ,$$
$$|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b \ .$$

証明　例として“ $|a| < b \iff -b < a < b$ ”を証明する．
まず，$|a| < b$ と仮定する．定理5.3.2より $a \leq |a|$ ，この不等式と仮定 $|a| < b$ より $a < b$ ．また，定理5.3.2と定理1.7.5とより $-a \leq |-a| = |a|$ ，この不等式と仮定 $|a| < b$ より $-a < b$ ；従って $-b < a$ ．$a < b$ かつ $-b < a$ なので，$-b < a < b$.
逆に，$-b < a < b$ と仮定する．$a \geq 0$ のときと $a < 0$ のときに場合分けする．$a \geq 0$ のときは，定理1.7.1より $a = |a|$ ，仮定より $a < b$ なので $|a| < b$ ．$a < 0$ のときは，定理1.7.1より $|a| = -a$ ，また仮定より $-b < a$ なので $-a < b$ ，従って $|a| < b$ ．つまりどちらのときも $|a| < b$.　（証明終り）

定理 5.3.5　実数 a と b とについて，

$$|a| > b \iff a > b \text{ または } a < -b \ ;$$
$$|a| \geq b \iff a \geq b \text{ または } a \leq -b \ .$$

証明　例として“ $|a| > b \iff a > b$ または $a < -b$ ”を証明する．
$|a| > b$ と仮定する．定理1.5.2より，$a \geq 0$ または $a < 0$ ．$a \geq 0$ のとき，定理1.7.1より $|a| = a$ なので，仮定 $|a| > b$ より $a > b$ ．$a < 0$ のとき，定理1.7.1より $|a| = -a$ なので，仮定 $|a| > b$ より $-a > b$ よって $a < -b$ ．従って $a > b$ または $a < -b$.
逆に，$a > b$ または $a < -b$ と仮定する．$a > b$ のとき，定理5.3.2より $|a| \geq a$ なので，定理1.5.1より $|a| > b$ ．$a < -b$ のとき，$b < -a$ ，定理5.3.2と定理1.7.5とより $-a \leq |-a| = |a|$ なので，定理1.5.1より $b < |a|$ ．従って，$a > b$ のときも $a < -b$ のときも，$|a| > b$.　（証明終り）

0 以上の実数 a と b とに対して，$\dfrac{a + b}{2}$ を a と b との相加平均といい，$\sqrt{ab}$ を a と b との相乗平均といいます．相加平均と相乗平均の大小関係について，次の定理が成り立ちます．

定理 5.3.6　$a \geq 0$ ，$b \geq 0$ である任意の実数 a と b とについて $\dfrac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ；等号が成り立つのは $a = b$ のときに限る．

証明　$a \geq 0$ ，$b \geq 0$ より $ab \geq 0$ ，従って $\sqrt{ab}^{\,2} = ab$ なので，

$$\begin{aligned}\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - \sqrt{ab}^{\,2} &= \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} - ab = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{4} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} \\ &= \frac{1}{4}(a - b)^2 \ .\end{aligned}$$

$(a - b)^2 \geq 0$ より $\dfrac{1}{4}(a - b)^2 \geq 0$ なので，$\left(\dfrac{a + b}{2}\right)^2 - \sqrt{ab}^{\,2} \geq 0$ ，$\left(\dfrac{a + b}{2}\right)^2 \geq \sqrt{ab}^{\,2}$ ，$a \geq 0$ かつ $b \geq 0$ なので $\dfrac{a + b}{2} \geq 0$ ．$\left(\dfrac{a + b}{2}\right)^2 \geq \sqrt{ab}^{\,2}$ かつ $\dfrac{a + b}{2} \geq 0$ なので，定理5.1.7より，$\dfrac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$.
$\left(\dfrac{a + b}{2}\right)^2 - \sqrt{ab}^{\,2} = \dfrac{1}{4}(a - b)^2$ より，$\dfrac{a + b}{2} = \sqrt{ab}$ のとき，$\dfrac{1}{4}(a - b)^2 = 0$ ，従って $a = b$ ．逆に $a = b$ のとき，$\dfrac{a + b}{2} = \dfrac{a + a}{2} = a$ ，$a \geq 0$ なので $\sqrt{ab} = \sqrt{a^2} = a$ ，従って $\dfrac{a + b}{2} = \sqrt{ab}$ ．故に，$a = b$ のときに限り $\dfrac{a + b}{2} = \sqrt{ab}$.　（証明終り）

$\boxed{\text{例題}}$　任意の正の実数 x について $\dfrac{x}{5} + \dfrac{45}{x} \geq 6$ となることを示し，等号が成り立つ条件を調べなさい．
〔方針〕相加平均と相乗平均との大小関係を用いる．
〔解答〕$\dfrac{x}{5} \geq 0$ かつ $\dfrac{45}{x} \geq 0$ なので，相加平均と相乗平均との大小関係より

$$\frac{\dfrac{x}{5} + \dfrac{45}{x}}{2} \geq \sqrt{\frac{x}{5} \cdot \frac{45}{x}} = \sqrt{9} = 3 \ .$$

従って $\dfrac{x}{5} + \dfrac{45}{x} \geq 6$ ．等号が成り立つ条件は，$\dfrac{x}{5} = \dfrac{45}{x}$ ，つまり $x = \sqrt{5 \cdot 45} = \sqrt{5^2 \cdot 3^2} = 15$.　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.3.5}}$　任意の正の実数 x について $\dfrac{x}{45} + \dfrac{20}{x} \geq \dfrac{4}{3}$ となることを示し，等号が成り立つ条件を調べなさい．