第5章の補遺3　3次不等式の解法

　3次不等式を解くためには，3次式を実数係数の範囲で因数分解することが基本になります．

例題　変数 y に関する3次不等式 $6y^3+y^2-10y+3>0$ 及び $6y^3+y^2-10y+3\geq 0$ を解く．

〔解説〕　$y=1$ のとき $6y^3+y^2-10y+3=0$ なので，因数定理より，整式 $6y^3+y^2-10y+3$ は $y-1$ で割り切れる：

$$6y^3+y^2-10y+3=(y-1)(6y^2+7y-3)\ .$$

y に関する2次方程式 $6y^2+7y-3=0$ を解くと $y=\frac{1}{3},-\frac{3}{2}$ ，従って，y の2次式 $6y^2+7y-3$ は実数係数の範囲で因数分解できて

$$6y^2+7y-3=6\left(y-\frac{1}{3}\right)\left(y+\frac{3}{2}\right)\ .$$

故に，y の3次式 $6y^3+y^2-10y+3$ を実数係数の範囲で因数分解すると

$$6y^3+y^2-10y+3=6(y-1)\left(y-\frac{1}{3}\right)\left(y+\frac{3}{2}\right)\ .$$

y の値について場合分けして，$6y^3+y^2-10y+3=6(y-1)\left(y-\frac{1}{3}\right)\left(y+\frac{3}{2}\right)$ の値の符号を調べる．

y の値	$\cdots$	$-\frac{3}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$y+\frac{3}{2}$ の値の符号	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$y-\frac{1}{3}$ の値の符号	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$y-1$ の値の符号	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$6(y-1)\left(y-\frac{1}{3}\right)\left(y+\frac{3}{2}\right)$ の値の符号	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

この表より，

　y に関する不等式 $6y^3+y^2-10y+3>0$ を解くと $-\frac{3}{2}<y<\frac{1}{3}$ または $y>1$，

　y に関する不等式 $6y^3+y^2-10y+3\geq 0$ を解くと $-\frac{3}{2}\leq y\leq\frac{1}{3}$ または $y\geq 1$．

終

問題 5.補遺3.1　変数 x に関する以下の不等式を解きなさい．

(1) $x^3+3\geq\frac{x}{2}(5x+1)$ ．　　(2) $3x^2(x-3)<2x(x+2)$ ．

例題　変数 x に関する3次不等式 $x^3-3x-2>0$ 及び $x^3-3x-2\geq 0$ を解く．

〔解説〕　$x=-1$ のとき $x^3-3x-2=0$ なので，因数定理より，整式 x^3-3x-2 は $x+1$ で割り切れる：

$$x^3-3x-2=(x+1)(x^2-x-2)\ .$$

2次式 x^2-x-2 は実数係数の範囲で更に因数分解できる: $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$．

従って，x の3次式 x^3-3x-2 を実数係数の範囲で因数分解すると

$$x^3-3x-2=(x+1)(x-2)(x+1)=(x+1)^2(x-2)\ .$$

x の値について場合分けして，$x^3-3x-2=(x+1)^2(x-2)$ の値の符号を調べる．

x の値	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$(x+1)^2$ の値の符号	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$ の値の符号	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+1)^2(x-2)$ の値の符号	$-$	0	$-$	0	$+$

従って，

　　x に関する不等式 $x^3-3x-2>0$ を解くと　$2<x$，

　　x に関する不等式 $x^3-3x-2\geq 0$ を解くと　$x=-1$ または $2\leq x$．

終

問題 5.補遺3.2　変数 x に関する不等式 $x(x^2-7)>(x+4)(x-3)$ を解きなさい．

　文字 x が現れる式 $f(x)$，$g(x)$ について，例えば $f(x)g(x)>0$ とします．仮に，任意の実数 x について $g(x)>0$ ならば，不等式 $f(x)g(x)>0$ の両辺を $g(x)$ で割ることができます．

例題　変数 u に関する3次不等式 $u^3+2u>3(u-2)$ を解く．

〔解説〕　与えられた不等式 $u^3+2u>3(u-2)$ を整理すると

$$u^3-u+6>0\ .$$

$u=-2$ のとき $u^3-u+6=0$ なので，因数定理より，整式 u^3-u+6 は $u+2$ で割り切れる：

$$u^3-u+6=(u+2)(u^2-2u+3)\ .$$

不等式 $(u+2)(u^2-2u+3)>0$ を解く．u に関する2次方程式 $u^2-2u+3=0$ の判別式の値は $2^2-4\cdot 3=-8<0$ なので，定理5.4より，

$$\text{任意の実数 } u \text{ について}\quad u^2-2u+3>0\ .$$

つまり，u の値に関わらず u^2-2u+3 の値は常に正である．従って，不等式

$$(u+2)(u^2-2u+3)>0$$

の両辺を u^2-2u+3 で割ることができて，$u+2>0$，つまり $u>-2$．故に，与えられた不等式を解くと $u>-2$．

終

問題 5.補遺3.3　変数 x に関する不等式 $\frac{x^2}{3}(x-2)\leq\frac{x-1}{2}$ を解きなさい．